FILA A

Ognuno dei seguenti quesiti può avere più risposte esatte (o nessuna); indicare con una crocetta tutte quelle che si ritengono corrette.

1. Siano A e B due insiemi tali che $B = \{\{A\}, \{A, A\}, \{A, \{A\}\}\}$. Quali tra le seguenti affermazioni sono corrette?

1. $A \subseteq B$
2. $A \in B$
3. $\{A, A, A\} \in B$
4. $\{\{A\}, \{A\}, \{A\}\} \in B$
5. $B \subseteq \{\{A\}\} \cup \{\{A, \{A\}\}\}$

2. Siano R ed R' due sottoinsiemi di $A \times A$.

1. Se $R \cap R'$ è riflessiva (su A), allora lo sono anche R ed R'.
2. Se R ed R' sono relazioni riflessive, allora anche $R \cap R'$ è riflessiva (su A).
3. Se R ed R' sono relazioni antisimmetriche, allora anche $R \cap R'$ lo è.
4. Se $R \cap R'$ è antisimmetrica, allora anche R ed R' lo sono.
5. Se R ed R' sono relazioni transitive, allora anche $R \cup R'$ lo è.
6. Se $R \cup R'$ è transitiva, allora anche R ed R' lo sono.

3.Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni.

1. Se f e g sono suriettive, allora lo è anche $g \circ f$.
2. Se $g \circ f$ è suriettiva, allora lo sono tanto f che g.
3. Se f e g sono iniettive, allora lo è anche $g \circ f$.
4. Se $g \circ f$ è biiettiva, allora lo sono tanto f che g.

4. Sia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una funzione. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere.

1. se $f(n) = n + 1$ per ogni n, allora f è una biiezione.
2. sia f definita come segue:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $f(n + 1) = 1 - f(n)$.

3. Esistono definizioni di f tali che f, vista come insieme di coppie, goda della proprietà simmetrica.
4. Se f è invertibile e sia f^{-1} la sua inversa. Allora $f^{-1} \circ (f \circ f) = f$
5. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

5. Sia A un insieme ed A^c il suo complemento rispetto ad un fissato insieme universo. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono false.

1. $A = A \cup (A \cap A^c)$
2. $A^c = A^c \cap (A \cap A^c)$
3. $A - A^c = A^c - A$
4. $A \cap (B \cap A^c) = A \cap B$, comunque scelto un insieme B
5. $(A - B) \cup A^c \subset A^c$, comunque scelto un insieme B
6. nessuna delle precedenti

6. Si consideri la seguente funzione parziale sui naturali:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ 2 \cdot f(\frac{n}{2}) + n & \text{se } n = 2^k \text{ per qualche } k \geq 1 \end{cases}$$

Si vuole provare che $f(n) = n \cdot log_2(n)$, su tutti gli n che sono potenze di 2. Si stabilisca quali tra le seguenti dimostrazioni sono giuste.

1. La funzione è definita solo su potenze di 2, cioè solo su numeri della forma 2^k; procediamo per induzione su k.

   Base: la base è per $k = 0$ ed è vera perchè $f(2^0) = 0 = 1 \cdot log_2(1) = 1 \cdot 0 = 0$.

   Induzione: Assumiamo la tesi vera fino a 2^k da dimostrare per 2^{k+1}. Per induzione, $f(2^k) = 2^k \cdot k$. Per definizione, $f(2^{k+1}) = 2 \cdot f(2^k) + 2^{k+1}$. Quindi, $f(2^{k+1}) = 2 \cdot (2^k \cdot k) + 2^{k+1} = 2 \cdot (2^k \cdot k + 2^k) = 2^{k+1} \cdot (k+1)$.

2. **Base:** la base è per $n = 0$ ed è vera perchè $f(0) = 2 \cdot f(\frac{0}{2}) + 0 = 0 + 0 = 0$.

   Induzione: Assumiamo la tesi vera fino a $n = 2^k$ da dimostrare per $n = 2^{k+1}$. Per induzione, $f(2^k) = 2^k \cdot k$. Per definizione, $f(2^{k+1}) = 2 \cdot f(2^k) + 2^{k+1}$. Quindi, $f(2^{k+1}) = 2 \cdot (2^k \cdot k) + 2^{k+1} = 2 \cdot (2^k \cdot k + 2^k) = 2^{k+1} \cdot (k+1)$.

3. **Base:** la base è per $n = 1$ ed è vera perchè $f(n) = 0 = 1 \cdot log_2(1) = 1 \cdot 0 = 0$.

   Induzione: Assumiamo la tesi vera fino a n da dimostrare per $n+1$. Per definizione, $f(n+1) = 2 \cdot f(\frac{n+1}{2}) + n + 1$. Per induzione, applicabile poichè $\frac{n+1}{2} \leq n$, abbiamo che $f(n+1) = 2 \cdot (\frac{n+1}{2} \cdot log_2(\frac{n+1}{2})) + n + 1 = (n+1) \cdot (log_2(\frac{n+1}{2}) + 1) = (n+1) \cdot (log_2(\frac{n+1}{2}) + log_2(2)) = (n+1) \cdot log_2(\frac{n+1}{2} \cdot 2) = (n+1) \cdot log_2(n+1)$.

SOLUZIONI: Le crocette andavano messe alle seguenti risposte:

1. numero 3 e 5
2. numero 1, 2 e 3
3. numero 1 e 3
4. numero 2, 3 e 4
5. numero 2, 3, 4 e 5
6. numero 1

FILA B

Ognuno dei seguenti quesiti può avere più risposte esatte (o nessuna); indicare con una crocetta tutte quelle che si ritengono corrette.

1. Siano A e B due insiemi tali che $A = \{\{B\}, \{B, B, B\}, \{B, \{B\}\}\}$. Quali tra le seguenti affermazioni sono corrette?

   1. $\{B, B\} \in A$
   2. $\{\{B\}, \{B\}, \{B\}\} \in A$
   3. $B \subseteq A$
   4. $B \in A$
   5. $A \subseteq \{\{B\}\} \cup \{\{B, \{B\}\}\}$

2. Siano R ed S due sottoinsiemi di $A \times A$.

   1. Se R ed S sono relazioni riflessive, allora anche $R \cap S$ è riflessiva (su A).
   2. Se $R \cap S$ è riflessiva (su A), allora lo sono anche R ed S.
   3. Se R ed S sono relazioni simmetriche, allora anche $R \cap S$ lo è.
   4. Se $R \cap S$ è simmetrica, allora anche R ed S lo sono.
   5. Se R ed S sono relazioni transitive, allora anche $R \cup S$ lo è.
   6. Se $R \cup S$ è transitiva, allora anche R ed S lo sono.

3.Siano $f : B \to C$ e $g : A \to B$ due funzioni.

   1. Se f e g sono iniettive, allora lo è anche $f \circ g$.
   2. Se $f \circ g$ è iniettiva, allora lo sono tanto f che g.
   3. Se f e g sono suriettive, allora lo è anche $f \circ g$.
   4. Se $f \circ g$ è suriettiva, allora lo sono tanto f che g.

4. Sia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ una funzione. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono false.

   1. se $f(n) = n + 1$ per ogni n, allora f è una biiezione.
   2. sia f definita come segue:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Allora $f(n + 1) = 1 - f(n)$.

3. Esistono definizioni di f tali che f, vista come insieme di coppie, goda della proprietà simmetrica.

4. Se f è invertibile e sia f^{-1} la sua inversa. Allora $f^{-1} \circ (f \circ f) = f$

5. Nessuna delle risposte precedenti è vera.

5. Sia A un insieme ed A^c il suo complemento rispetto ad un fissato insieme universo. Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere.

1. $A = A \cup (A \cap A^c)$
2. $A^c = A^c \cap (A \cap A^c)$
3. $A - A^c = A^c - A$
4. $A \cap (B \cap A^c) = A \cap B$, comunque scelto un insieme B
5. $(A - B) \cup A^c \subset A^c$, comunque scelto un insieme B
6. nessuna delle precedenti

6. Si consideri la seguente funzione parziale sui naturali:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ 2 \cdot f(\frac{n}{2}) + n & \text{se } n = 2^k \text{ per qualche } k \geq 1 \end{cases}$$

Si vuole provare che $f(n) = n \cdot log_2(n)$, su tutti gli n che sono potenze di 2. Si stabilisca quali tra le seguenti dimostrazioni sono sbagliate.

1. La funzione è definita solo su potenze di 2, cioè solo su numeri della forma 2^k; procediamo per induzione su k.

   Base: la base è per $k = 0$ ed è vera perchè $f(2^0) = 0 = 1 \cdot log_2(1) = 1 \cdot 0 = 0$.

   Induzione: Assumiamo la tesi vera fino a 2^k da dimostrare per 2^{k+1}. Per induzione, $f(2^k) = 2^k \cdot k$. Per definizione, $f(2^{k+1}) = 2 \cdot f(2^k) + 2^{k+1}$. Quindi, $f(2^{k+1}) = 2 \cdot (2^k \cdot k) + 2^{k+1} = 2 \cdot (2^k \cdot k + 2^k) = 2^{k+1} \cdot (k+1)$.

2. **Base:** la base è per $n = 0$ ed è vera perchè $f(0) = 2 \cdot f(\frac{0}{2}) + 0 = 0 + 0 = 0$.

   Induzione: Assumiamo la tesi vera fino a $n = 2^k$ da dimostrare per $n = 2^{k+1}$. Per induzione, $f(2^k) = 2^k \cdot k$. Per definizione, $f(2^{k+1}) = 2 \cdot f(2^k) + 2^{k+1}$. Quindi, $f(2^{k+1}) = 2 \cdot (2^k \cdot k) + 2^{k+1} = 2 \cdot (2^k \cdot k + 2^k) = 2^{k+1} \cdot (k+1)$.

3. **Base:** la base è per $n = 1$ ed è vera perchè $f(n) = 0 = 1 \cdot log_2(1) = 1 \cdot 0 = 0$.

   Induzione: Assumiamo la tesi vera fino a n da dimostrare per $n+1$. Per definizione, $f(n+1) = 2 \cdot f(\frac{n+1}{2}) + n + 1$. Per induzione, applicabile poichè $\frac{n+1}{2} \leq n$, abbiamo che $f(n+1) = 2 \cdot (\frac{n+1}{2} \cdot log_2(\frac{n+1}{2})) + n + 1 = (n+1) \cdot (log_2(\frac{n+1}{2}) + 1) = (n+1) \cdot (log_2(\frac{n+1}{2}) + log_2(2)) = (n+1) \cdot log_2(\frac{n+1}{2} \cdot 2) = (n+1) \cdot log_2(n+1)$.

SOLUZIONI: Le crocette andavano messe alle seguenti risposte:

1. numero 1 e 5
2. numero 1, 2 e 3
3. numero 1 e 3
4. numero 1
5. numero 1
6. numero 2 e 3