Cognome ________________________________

Nome___________________**Anno di corso**____

Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canale A – D

7 – II – 2006 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Siano A e B due insiemi e si consideri l'insieme K delle relazioni tra A e B. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - ☐ A. K è un insieme finito se e soltanto se A e B sono finiti
   - ☐ B. $K = A \times B$
   - ☐ C. K non può contenere relazioni riflessive
   - ☐ D. l'insieme delle funzioni da A a B è un sottinsieme proprio di K
   - ☐ E. Nessuna delle precedenti è vera

2. Provare per induzione che, se a è un reale, $a > 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$, per ogni $n \in \mathbf{N}$.

3. Sia data la formula $\forall x(\exists y\ P(x.y) \Rightarrow P(x,x))$. Quale delle seguenti strutture non è un modello per essa?
   - ☐ A. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n < m\}$.
   - ☐ B. D = **un qualunque insieme**, $|P|$ = una relazione simmetrica e transitiva.
   - ☐ C. D = insieme delle rette del piano, $|P| = \{(r,r') \mid r$ è distinta da $r'\}$.
   - ☐ D. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n = 2m\}$

4. Mostrare, usando il metodo di Hilbert, che la seguente espressione è un teorema:

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow \neg Q)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P))$$

5. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) che la seguente formula è valida:

$$(\forall x\ \exists y\ P(x, y) \vee \forall x\ \exists y\ Q(x, y)) \rightarrow \forall x\ \exists y\ (P(x, y) \vee Q(x, y))$$

SOLUZIONI:

1. le crocette andavano messe sulle lettere A e D

2. La dimostrazione è per induzione su n.
   Il passo base ($n = 0$) è ovvio: $1 \geq 1$.
   Per il passo induttivo, si osservi che
   $$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n (1 + a) &&\geq (1 + n\,a)(1 + a)\\ &= 1 + (n + 1)\,a + n\,a^2 &&\geq 1 + (n + 1)\,a\end{aligned}$$
   dove le due uguaglianze si hanno per definizione di esponente e prodotto, la prima disuguaglianza si ha per induzione e l'ultima disuguaglianza eliminando l'addendo $n\,a^2$.

3. le crocette andavano messe sulle lettere A, C e D

4. $$\begin{array}{lll}
P \to (Q \to \neg Q),\ P \to Q & \vdash & (P \to (Q \to \neg Q)) \to ((P \to Q) \to (P \to \neg Q)) \\
P \to (Q \to \neg Q),\ P \to Q & \vdash & P \to (Q \to \neg Q) \\
P \to (Q \to \neg Q),\ P \to Q & \vdash & (P \to Q) \to (P \to \neg Q) \\
P \to (Q \to \neg Q),\ P \to Q & \vdash & P \to Q \\
P \to (Q \to \neg Q),\ P \to Q & \vdash & P \to \neg Q \\
P \to (Q \to \neg Q),\ P \to Q & \vdash & Q \to \neg P \\
P \to (Q \to \neg Q) & \vdash & (P \to Q) \to (Q \to \neg P) \\
 & \vdash & (P \to (Q \to \neg Q)) \to ((P \to Q) \to (Q \to \neg P))
\end{array}$$

5. Bisognava svolgere il tableaux della negata. Inoltre, era strettamente necessario applicare una precisa strategia di costruzione del tableaux: bisognava prima istanziare tutti gli esistenziali e poi, con le costanti così introdotte, istanziare gli universali.