Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canale A – D

6 – VII – 2004 (prof.ssa Anna Labella)

1. Sia R una relazione su X ed R^{-1} la sua inversa. Quale delle seguenti affermazioni NON è sempre vera?
   □ A se R è simmetrica allora R^{-1} è simmetrica
   □ B. se R è transitiva allora R^{-1} è transitiva
   □ C. se R è totale allora R^{-1} è totale
   □ D. $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

2. Sia $A = \{ a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots\}$ una successione di numeri naturali tale che $a_0=1/2$, $a_1=1/4$ e $a_{n+2} = (a_n)^2 \cdot a_{n+1}$. Dimostrare che $a_n = \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$((A \rightarrow B) \ \wedge \ (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \ \rightarrow \ (A \rightarrow C)$$

4. Si dica se la formula

$$\forall x \ (\ (P(x) \vee Q(x)) \ \rightarrow \ (P(x) \wedge Q(x)) \ )$$

   è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

Domanda 1: l'unica affermazione che non vale sempre è la D

Domanda 2: per induzione su n .

Base: per definizione, $2^0 = 1$ e $2^1 = 2$; quindi $a_0 = 1/2$. Similmente, $a_1 = 1/4$

Induzione (vero fino a $n+1$, da dimostrare per $n+2$):

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} &= (a_n)^2 \cdot a_{n+1} && \text{per definizione} \\
&= \left(\frac{1}{2^{2^n}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^{2^{n+1}}} && \text{per induzione} \\
&= \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \cdot \frac{1}{2^{2^{n+1}}} && \text{per operazioni tra esponenti} \\
&= \frac{1}{2^{2^{n+2}}} && \text{per operazioni tra esponenti}
\end{aligned}
$$

Domanda 3: tavole di verità, tableaux e Gentzen sono da costruire in maniera automatica. La dimostrazione in Hilbert è la seguente:

$$
\begin{array}{rcl}
A \to B , A \to (B \to C) , A & \vdash & A \to (B \to C) \\
A \to B , A \to (B \to C) , A & \vdash & A \\
A \to B , A \to (B \to C) , A & \vdash & B \to C \\
A \to B , A \to (B \to C) , A & \vdash & A \to B \\
A \to B , A \to (B \to C) , A & \vdash & B \\
A \to B , A \to (B \to C) , A & \vdash & C \\
A \to B , A \to (B \to C) & \vdash & A \to C \\
A \to B & \vdash & (A \to (B \to C)) \to (A \to C) \\
A \to B & \vdash & \neg (A \to C) \to \neg (A \to (B \to C)) \\
 & \vdash & (A \to B) \to (\neg (A \to C) \to \neg (A \to (B \to C))) \\
 & \vdash & \neg (A \to C) \to ((A \to B) \to \neg (A \to (B \to C))) \\
 & \vdash & (\neg ((A \to B) \to \neg (A \to (B \to C)))) \to (A \to C) \\
 & \vdash & ((A \to B) \wedge (A \to (B \to C))) \to (A \to C)
\end{array}
$$

Domanda 4: La formula è soddisfacibile. Un possibile modello è il seguente:

- l'universo è l'insieme dei naturali
- il predicato $P(x)$ è definito come "x è un numero pari"
- il predicato $Q(x)$ è definito come "x è un multiplo di 2"