

Cognome _____

Nome _____ Anno di corso _____

Esame del corso di
LOGICA MATEMATICA - Canale A – D
4 – VII – 2006 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Si consideri la relazione $R = \{ (a,b) , (b,c) , (c,a) , (a,c) , (b,a) \}$ definita sulle prime tre lettere dell'alfabeto. La sua chiusura transitiva

- A. coincide con R
- B. contiene R
- C. è contenuta in R
- D. è inconfrontabile insiemisticamente con R
- E. coincide con $\{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$
- F. nessuna delle precedenti

Qual è la relazione R' definita sulle prime tre lettere dell'alfabeto di cardinalità minima tale che la sua chiusura transitiva coincide con $\{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$?

RISPOSTA: $R' = \{ \text{_____} \}$

2. Provare per induzione che

$$(1 - 1/2) (1 - 1/3) \dots (1 - 1/n) = 1/n$$

Qual è il minimo valore base considerabile?

3. Sia data la formula $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y \neg P(x,y)$.

- A. Non esiste un modello perché la formula è contraddittoria .
- B. $D = \text{un singoletto}$, $|P| =$ una relazione qualunque, è un modello.
- C. $D =$ insieme delle rette del piano , $|P| = \{(r,r') \mid r \text{ è distinta da } r'\}$, è un modello.
- D. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid \text{esiste } k \text{ tale che } mk = n\}$, è un modello.

4. Mostrare, usando il metodo di Hilbert, che la seguente espressione è un teorema:

$$P \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q)$$

5. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) che la seguente formula è soddisfacibile:

$$(\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y \neg P(x,y)) \rightarrow \exists y P(a,a)$$

SOLUZIONI:

1. crocette su B ed E. $R' = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$

2. Il minimo valore per cui la tesi è vera è 2. Pertanto, la dimostrazione procede nel modo seguente:

Passo base ($n = 2$): ovviamente $1/2 = 1/2$.

Passo induttivo (vero fino a n , da dimostrare per $n+1$): per ipotesi induttiva

$$(1 - 1/2)(1 - 1/3) \dots (1 - 1/n) = 1/n$$

Moltiplicando entrambe i membri per $(1 - 1/(n+1))$ si ottiene

$$\begin{aligned} (1 - 1/2)(1 - 1/3) \dots (1 - 1/n)(1 - 1/(n+1)) &= 1/n (1 - 1/(n+1)) \\ &= 1/n - 1/n(n+1) \\ &= ((n+1) - 1) / n(n+1) \\ &= n / n(n+1) \\ &= 1 / (n+1) \end{aligned}$$

3. le crocette vanno messe sulla lettera B

4.

$$\begin{aligned} P \rightarrow \neg Q, P &\vdash P \rightarrow \neg Q \\ P \rightarrow \neg Q, P &\vdash P \\ P \rightarrow \neg Q, P &\vdash \neg Q \\ P \rightarrow \neg Q &\vdash P \rightarrow \neg Q \\ &\vdash (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q) \\ &\vdash P \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg Q) \\ &\vdash P \rightarrow (\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q) \end{aligned}$$

5.