Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D / E-O

4 – VII – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

FILA A

1. Si considerino le seguenti funzioni:

   $f : R \rightarrow R^+$, tale che $f(x) = x^2$

   $g : R \rightarrow R$, tale che $g(y) = y - 4$

   $h : R^+ \rightarrow R^+$, tale che $h(z) = \sqrt{z}$ (N.B.: h è la radice positiva)

   Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

   ☐ A. $(g \circ h \circ f)(x) = x - 4$

   ☐ B. $g \circ h \circ f = g \circ f \circ h$

   ☐ C. $(h \circ f \circ g)(x) = g(x)$

   ☐ D. $(h \circ g \circ f)(x) = (x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$

2. Chiamiamo "albero delle somme" un albero binario nel quale ciascun nodo è etichettato da un numero naturale maggiore di *0* e nel quale ogni nodo interno ha come etichetta il numero *n+m*, dove *n* è l'etichetta della radice del suo sottoalbero sinistro ed *m* quella del sottoalbero destro. Dimostrare che un albero delle somme con radice *n* ha al più *n* foglie.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$Q \rightarrow ((Q \wedge P) \rightarrow P)$$

4. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) se la formula

$$\exists x\ \forall z\ \exists y\ (\neg P(x, y) \vee \neg P(y, x))$$

   è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D / E-O

4 – VII – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

FILA B

1. Si considerino le seguenti funzioni:

    $h : R^+ \to R^+$, tale che $h(z) = \sqrt{z}$ (N.B.: f è la radice positiva)

    $g : R \to R$, tale che $g(y) = y - 4$

    $f : R \to R^+$, tale che $f(x) = x^2$

    Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

    □ A. $(f \circ h \circ g)(x) = g(x)$

    □ B. $g \circ f \circ h = g \circ h \circ f$

    □ C. $(g \circ f \circ h)(x) = x - 4$

    □ D. $(f \circ g \circ h)(x) = (x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$

2. Chiamiamo "albero delle somme" un albero binario nel quale ciascun nodo è etichettato da un numero naturale maggiore di *0* e nel quale ogni nodo interno ha come etichetta il numero $n+m$, dove n è l'etichetta della radice del suo sottoalbero sinistro ed m quella del sottoalbero destro. Dimostrare che un albero delle somme con radice n ha al più n foglie.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$P \to ((Q \land P) \to Q)$$

4. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) se la formula

$$\exists y\ \forall z\ \exists x\ (\neg P(x, y) \lor \neg P(y, x))$$

è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

Es.1:

Fila A: NESSUNA affermazione è corretta (quindi non andava messa alcuna crocetta).
Fila B: risposta C

Es. 2:

Per induzione completa sull'etichetta della radice, diciamo sia n.

Base (n = 1): bisogna osservare che un albero con radice etichettata 1 o non ha figli oppure ha un unico figlio. Nel primo caso, l'albero ha un solo nodo, che è anche una foglia. Nel secondo caso, anche l'unico figlio della radice ha etichetta 1, per costruzione. Tale nodo o non ha figli (ed in tal caso è l'unica foglia dell'albero) oppure ha un figlio con etichetta 1. Poichè l'albero è formato da un insieme finito di nodi, questa "catena" di nodi etichettati con 1 deve terminare in un nodo che non ha ulteriori figli; tale nodo sarà l'unica foglia dell'albero.

Induzione (n > 1): se la radice non ha figli o è la radice di una catena, il caso è banale: ci sarà una sola foglia (vedi il caso base) e la tesi è soddisfatta perchè $n > 1$. Sia invece v il primo discendente della radice che ha 2 figli. Per costruzione, v è etichettato con n. Ora, abbiamo che $n = h+k$, dove h è l'etichetta del sottoalbero sinistro e k l'etichetta del sottoalbero destro. Poichè $h, k > 0$ (per definizione di albero delle somme), abbiamo che $h, k < n$. Per induzione, il sottoalbero sinistro di v ha al più h foglie e il sottoalbero destro ne ha al più k; pertanto, il sottoalbero radicato in v (e, di conseguenza, l'albero originario) ha al più $h+k$ (= n) foglie.

Es. 3:

Diamo solo la prova con il metodo di Hilbert. Anzitutto, $Q \wedge P \equiv \neg(Q \to \neg P)$

$$\begin{array}{lll} Q & \vdash & \neg P \to (Q \to \neg P) \\ Q & \vdash & \neg(Q \to \neg P) \to P \\ & \vdash & Q \to (\neg(Q \to \neg P) \to P) \end{array}$$

Es. 4:

E' soddisfacibile. Un possibile modello è costituito prendendo un qualunque predicato P(a,b) non simmetrico, ad esempio la relazione '<' sugli interi.