

Cognome _____ Nome _____

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 4, 5 e 6; tempo: 1 ora)
- scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)

Esame del corso di **LOGICA MATEMATICA - Canale A – D**
26 – I – 2007 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione e si consideri l'insieme $I = \{(x,y) : f(x) = f(y)\}$. Allora

- A I è una relazione d'equivalenza
- B I è una relazione d'ordine
- C I non è una relazione
- D Se f è iniettiva, allora I è l'identità

2. Siano X, Y e Z insiemi qualsiasi. Allora

- A $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
- B $(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z)$
- C $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \setminus Z)$
- D $X^c \setminus Z = (X \setminus Z)^c$

3. Provare per induzione che, per ogni $n \geq 0$, $\sum_{k=0, \dots, n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$

4. Verificare con le tavole di verità e con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile (si apprezza una procedura breve)

$$(A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$$

5. Sia data la formula $\exists x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge \neg P(x,z))$. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa.

- A (\mathbb{N}, \leq)
- B (I, \emptyset)
- C (insieme degli uomini, « -padre di - »)
- D $(I, I \times I)$

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z))$$

SOLUZIONI:

1. crocette su A e D
2. crocette su A e B
3. Passo base ($n = 0$): ovviamente $1 = 2 - 1$.

Passo induttivo (vero fino a n , da dimostrare per $n+1$): per ipotesi induttiva

$$\begin{aligned}\sum_{k=0, \dots, n+1} 1/2^k &= \sum_{k=0, \dots, n} 1/2^k + 1/2^{n+1} = 2 - 1/2^n + 1/2^{n+1} \\ &= 2 - 1/2^n + 1/2 \cdot 1/2^n = 2 - 1/2^n (1 - 1/2) = 2 - 1/2^{n+1}\end{aligned}$$

4. Si formano rami che contengono al più un'istanza di ogni lettera.

5. crocetta su C.

- 6.

$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y P(y)\}$	$\vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$	Ass
$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y P(y)\}$	$\vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (P(a) \rightarrow Q(a))$	Ax4
$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y P(y)\}$	$\vdash P(a) \rightarrow Q(a)$	MP
$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y P(y)\}$	$\vdash \forall y P(y) \rightarrow P(a)$	Ax4
$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y P(y)\}$	$\vdash \forall y P(y)$	Ass
$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y P(y)\}$	$\vdash P(a)$	MP
$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y P(y)\}$	$\vdash Q(a)$	MP
$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall y P(y)\}$	$\vdash \forall z Q(z)$	G
$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))\}$	$\vdash \forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z)$	TD
$\vdash \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z))$		TD