Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D e E – O

24 – I – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

Compito A

1. Sia $f : A \to B$ una funzione iniettiva a dominio finito. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - □ A. B deve necessariamente essere finito affinchè f sia iniettiva
   - □ B. $|B| \geq |A|$
   - □ C. $|B| = |A|$ se e solo se f è biiettiva
   - □ D. B non può coincidere con A
   - □ E. Non è possibile che $B \subset A$
   - □ F. Nessuna delle precedenti è vera

2. Sia $A_n = \{ A : A \subseteq \{1,...,n\} \wedge 1 \in A\}$, per $n > 0$. Si dimostri per induzione che $|A_n| = 2^{n-1}$

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso (tavole di verità, tableaux, Gentzen e Hilbert) che la seguente espressione è una tautologia:

$$\neg(A \to A) \quad \to \quad \neg (C \wedge B)$$

4. Si dica se la formula

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (\ (\ P(x, y, z)\ \wedge Q(z,w)\ )\ \to\ P(x, y, w)\ )$$

è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

Domanda 1: le affermazione che valgono sono la B, la C e la E

Domanda 2:

Base ($n = 1$): per definizione, l'insieme delle parti di $\{1\}$ è $\{\emptyset, \{1\}\}$, da cui

$|A_1| = 1 = 2^{1-1} = 2^0$

Induzione (vero fino a n, da dimostrare per $n+1$):

E' facile convincersi che posso costruire A_{n+1} a partire da A_n nel modo seguente:

- prendo a turno ogni $A \in A_n$
- aggiungo A e $A \cup \{n+1\}$ ad A_{n+1}

Per induzione $|A_n| = 2^{n-1}$ e quindi $|A_{n+1}| = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}$

Domanda 3: tavole di verità, tableaux e Gentzen sono da costruire in maniera automatica. La dimostrazione in Hilbert è la seguente:

$$
\begin{array}{lll}
(C \wedge B), A & \vdash & A \\
(C \wedge B) & \vdash & A \rightarrow A \\
 & \vdash & (C \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow A) \\
 & \vdash & \neg(A \rightarrow A) \rightarrow \neg(C \wedge B)
\end{array}
$$

Domanda 4: La formula è soddisfacibile. Un possibile modello è il seguente:

- l'universo è l'insieme dei naturali
- il predicato $P(a, b, c)$ vale se e solo se (per definizione) $a + b = c$
- il predicato $Q(a, b)$ vale se e solo se (per definizione) $a = b$

Con questa interpretazione, la formula dice che per ogni coppia di naturali (x e y) posso trovare un terzo naturale (z) che ne è la somma e che comunque preso un quarto naturale (w) uguale a z deve essere che $x+y = w$ (ovviamente!).

Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D e E – O

24 – I – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

Compito B

1. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione suriettiva a codominio finito. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

□ A. A deve necessariamente essere finito affinchè f sia anche iniettiva

□ B. $|A| \geq |B|$ affinche' la funzione sia suriettiva

□ C. $|B| = |A|$ se e solo se f è biiettiva

□ D. B non può coincidere con A

□ E. E' possibile che $B \subset A$

□ F. Nessuna delle precedenti è vera

2. Sia $A_n = \{ A : A \subseteq \{1,...,n\} \wedge 2 \in A\}$, per $n > 1$. Si dimostri per induzione che $|A_n| = 2^{n-1}$

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso (tavole di verità, tableaux, Gentzen e Hilbert) che la seguente espressione è una tautologia:

$$\neg (C \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow C)) \quad \rightarrow \quad \neg (A \wedge B)$$

4. Si dica se la formula

$$\forall x \, \forall y \, \forall w \, \exists z \, (\, (Q(w,z) \wedge P(x, y, w)) \rightarrow P(x, y, z))$$

è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

Domanda 1: le affermazione che valgono sono la A, la C e la E

Domanda 2:

Base (n = 2): per definizione, l'insieme delle parti di $\{1,2\}$ è $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, da cui

$|A_2| = 2 = 2^{2-1} = 2^1$

Induzione (vero fino a n , da dimostrare per n+1):

E' facile convincersi che posso costruire A_{n+1} a partire da A_n nel modo seguente:

- prendo a turno ogni $A \in A_n$
- aggiungo A e $A \cup \{n+1\}$ ad A_{n+1}

Per induzione $|A_n| = 2^{n-1}$ e quindi $|A_{n+1}| = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}$

Domanda 3: tavole di verità, tableaux e Gentzen sono da costruire in maniera automatica. La dimostrazione in Hilbert è la seguente:

$A \wedge B , C \rightarrow C , C$	$\vdash C$
$A \wedge B , C \rightarrow C$	$\vdash C \rightarrow C$
$A \wedge B$	$\vdash (C \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow C)$
$A \wedge B$	$\vdash C \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow C)$
	$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow C))$
	$\vdash \neg (C \rightarrow ((C \rightarrow C) \rightarrow C)) \rightarrow \neg (A \wedge B)$

Domanda 4: La formula è soddisfacibile. Un possibile modello è il seguente:

- l'universo è l'insieme dei naturali
- il predicato $P(a, b, c)$ vale se e solo se (per definizione) $a + b = c$
- il predicato $Q(a, b)$ vale se e solo se (per definizione) $a = b$

Con questa interpretazione, la formula dice che per ogni terna di naturali (x, y e w) tali che il terzo e' la somma dei primi due, posso sempre trovare un quarto naturale (z) uguale a w che e' la somma dei primi due (ovviamente!).