

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 4, 5 e 6; tempo 1 ora)
- scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L - FILA A
21 - 2 - 2011**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $A \subseteq B$ e sia $f: B \rightarrow \{0,1\}$ la funzione caratteristica di A , tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Quali delle seguenti risposte è esatta?

- A. $A = \{x \in B : f(x) = 1\}$
 - B. Se f è iniettiva allora $|B| = 2$
 - C. Se f è suriettiva allora $\emptyset \subset A \subset B$
 - D. f vista come insieme di coppie è un insieme finito se e solo se A è finito
2. Si considerino le figure del piano e la relazione R che accoppia figure con esattamente un vertice in comune. Quali proprietà soddisfa R ?
- A. Riflessiva
 - B. Irriflessiva
 - C. Simmetrica
 - D. Antisimmetrica
 - E. Transitiva
3. Sia L il linguaggio sull'alfabeto $\{a,b\}$ induttivamente definito da
- $\varepsilon \in L$
 - se $w \in L$ allora $awb \in L$

Si dimostri per induzione sulla lunghezza di w che, se $w \in L$, allora $w = a^n b^n$ per qualche $n \in \mathbf{N}$.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la formula $A \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$ è un teorema.

5. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))))$ è soddisfacibile.

6. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per la formula dell'esercizio precedente?

- A. il dominio è \mathbf{N} , $P(x)$ = "x è pari", $Q(x)$ = "x = 0"
- B. il dominio è \mathbf{Q} , $P(x)$ = "x è intero", $Q(x)$ = "x > 0"
- C. il dominio è \mathbf{R} , $P(x)$ = "x = 0", $Q(x)$ = "x è intero"
- D. il dominio è \mathbf{N} , $P(x)$ = "x è intero", $Q(x)$ = "x \geq 0"

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 4, 5 e 6; tempo 1 ora)
- scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L - FILA B
21 - 2 - 2011**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $A \subseteq B$ e sia $f: B \rightarrow \{0,1\}$ la funzione caratteristica di A , tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Quali delle seguenti risposte è esatta?

- A. $B = \{x \in B : 1 - f(x) \in \{0,1\}\}$
 - B. Se $|B| = 2$ allora f è iniettiva
 - C. f deve essere suriettiva
 - D. f vista come insieme di coppie è un insieme finito se e solo se $B \setminus A$ è finito
2. Si considerino i solidi dello spazio e la relazione R che accoppia solidi con al più un vertice in comune. Quali proprietà soddisfa R ?
- A. Antisimmetrica
 - B. Transitiva
 - C. Riflessiva
 - D. Irriflessiva
 - E. Simmetrica
3. Sia L il linguaggio sull'alfabeto $\{a,b\}$ induttivamente definito da
- $\varepsilon \in L$
 - se $w \in L$ allora $awb \in L$

Si dimostri per induzione su n che $a^n b^n \in L$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la formula $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg A))$ è un teorema.
5. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$ è soddisfacibile.
6. Quale delle seguenti interpretazioni NON è un modello per la formula dell'esercizio precedente?
- A. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "0 > x"$, $Q(x) = "x > 0"$
 - B. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "0 \geq x"$, $Q(x) = "x \geq 0"$
 - C. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "0 = x"$, $Q(x) = "x < 0"$
 - D. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "x \text{ è successore}"$, $Q(x) = "x = 0"$

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 4, 5 e 6; tempo 1 ora)
- scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L - FILA C
21 - 2 - 2011**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $A \subseteq B$ e sia $f: B \rightarrow \{0,1\}$ la funzione caratteristica di A , tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Quali delle seguenti risposte è esatta?

- A. Se f è iniettiva allora $|B|$ non può che essere 2
 - B. f vista come insieme di coppie è un insieme finito se e solo se B è finito
 - C. $A = \{x \in B : f(x) = 0\}$
 - D. Se f è suriettiva allora non può essere $A = \emptyset$ né $A = B$
2. Si considerino le figure del piano e la relazione R che accoppia figure con esattamente un lato in comune. Quali proprietà soddisfa R ?
- A. Simmetrica
 - B. Antisimmetrica
 - C. Riflessiva
 - D. Irriflessiva
 - E. Transitiva
3. Sia L il linguaggio sull'alfabeto $\{a,b\}$ induttivamente definito da
- $\varepsilon \in L$
 - se $w \in L$ allora $awb \in L$

Si dimostri per induzione sulla lunghezza di w che, se $w \in L$, allora $w = a^n b^n$ per qualche $n \in \mathbf{N}$.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la formula $A \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$ è un teorema.

5. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))))$ è soddisfacibile.

6. Quale delle seguenti interpretazioni NON è un modello per la formula dell'esercizio precedente?

- A. il dominio è \mathbf{R} , $P(x) = "x = 0"$, $Q(x) = "x \text{ è intero}"$
- B. il dominio è \mathbf{Q} , $P(x) = "x \text{ è intero}"$, $Q(x) = "x > 0"$
- C. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "x \text{ è intero}"$, $Q(x) = "x \geq 0"$
- D. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "x \text{ è pari}"$, $Q(x) = "x = 0"$

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 4, 5 e 6; tempo 1 ora)
- scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L - FILA D
21 - 2 - 2011**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $A \subseteq B$ e sia $f: B \rightarrow \{0,1\}$ la funzione caratteristica di A , tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Quali delle seguenti risposte è esatta?

- A. Se $|B| \leq 2$ allora f deve essere iniettiva
 - B. f non può che essere suriettiva
 - C. f vista come insieme di coppie è un insieme finito se e solo se $A \setminus B$ è finito
 - D. $B = \{x \in B : (f(x))^2 \in \{0,1\}\}$
2. Si considerino i solidi dello spazio e la relazione R che accoppia solidi con al più uno spigolo in comune. Quali proprietà soddisfa R ?
- A. Irriflessiva
 - B. Antisimmetrica
 - C. Riflessiva
 - D. Transitiva
 - E. Simmetrica
3. Sia L il linguaggio sull'alfabeto $\{a,b\}$ induttivamente definito da
- $\varepsilon \in L$
 - se $w \in L$ allora $awb \in L$

Si dimostri per induzione su n che $a^n b^n \in L$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la formula $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg A))$ è un teorema.
5. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$ è soddisfacibile.
6. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per la formula dell'esercizio precedente?
- A. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "0 \geq x"$, $Q(x) = "x \geq 0"$
 - B. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "0 > x"$, $Q(x) = "x > 0"$
 - C. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "x \text{ è successore}"$, $Q(x) = "x = 0"$
 - D. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = "0 = x"$, $Q(x) = "x < 0"$

SOLUZIONI

1. Fila A: Crocette su A, B, C
 Fila B: Crocetta su A
 Fila C: Crocette su A, B, D
 Fila D: Crocetta su D

2. Fila A: Crocette su B, C
 Fila B: Crocetta su D, E
 Fila C: Crocette su A, D
 Fila D: Crocetta su A, E

3. FILE A e C:

Base ($|w| = 0$): L'unica stringa di lunghezza 0 è $\varepsilon = a^0b^0$.

Induzione (vero per $|w|$ fino a k , da dimostrare per $|w| = k+1$):

Visto che $|w| > 0$, deve essere che $w = aw'b$, per qualche $w' \in L$. Per induzione, $w' = a^n b^n$, per qualche $n \in \mathbb{N}$, da cui $w = aa^n b^n b = a^{n+1} b^{n+1}$.

FILE B e D:

Base ($n = 0$): Per definizione, $a^0 b^0 = \varepsilon \in L$.

Induzione (vero per $n = k$, da dimostrare per $n = k+1$):

Per induzione $a^k b^k \in L$. Per definizione del linguaggio, $aa^k b^k b = a^{k+1} b^{k+1} \in L$.

4. FILE A e C:

$A, (A \rightarrow \neg A), B$	\vdash	A	Ass.
$A, (A \rightarrow \neg A), B$	\vdash	$A \rightarrow \neg A$	Ass.
$A, (A \rightarrow \neg A), B$	\vdash	$\neg A$	MP
	\vdash	$A \rightarrow ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$	TD 3 volte

FILE B e D:

$(\neg A \rightarrow B)$	\vdash	$(\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg A))$	Ax. 1
	\vdash	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg A))$	TD

5. Si costruisca il tableau per la formula data e si noti che resta aperto.

6. Fila A: Crocetta su D
 Fila B: Crocette su A, C, D
 Fila C: Crocette su A, B, D
 Fila D: Crocetta su A