

Cognome _____ Nome _____

Esame del corso di **LOGICA MATEMATICA - Canale A – D**
20 – VI – 2007 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia R una relazione d'ordine stretto su un insieme $A \neq \emptyset$. Allora
- A $R \cup R^{-1}$ è una relazione d'equivalenza
 - B $R \cup R^{-1}$ è una relazione simmetrica e transitiva
 - C $R \cap R^{-1}$ è una relazione d'equivalenza
 - D $R \setminus R^{-1}$ è una relazione d'ordine stretto su A
 - E Nessuna delle risposte precedenti è corretta

2. Sia $a \neq 1$; provare per induzione che, per ogni $n > 0$, $\sum_{k=1, \dots, n} a^k = a \frac{1-a^n}{1-a}$

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow C))))$$

4. Sia data la formula $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa.

- A $(\mathbb{N}, \text{numeri pari}, \text{numeri dispari})$
- B $(\mathbb{Z}, \text{numeri non positivi}, \text{numeri non negativi})$
- C tutte le interpretazioni sono modelli
- D $(I, I \times I, I \times I)$
- E $(I, \emptyset, \emptyset)$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è valida

$$\forall x (\forall y P(y) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall z Q(z))$$

SOLUZIONI:

1. crocette su B e D

2. Passo base ($n = 1$): ovviamente $\sum_{k=1,\dots,n} a^k = a$

Passo induttivo (vero fino a n , da dimostrare per $n+1$): per ipotesi induttiva

$$\begin{aligned}\sum_{k=1,\dots,n+1} a^k &= \sum_{k=1,\dots,n} a^k + a^{n+1} = a(1 - a^n) / (1 - a) + a^{n+1} \\ &= \frac{a - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1 - a} = \frac{a - a^{n+2}}{1 - a} = a \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\end{aligned}$$

3.

A,B,A,C	-	C
A,B,A	-	$C \rightarrow C$
A,B	-	$A \rightarrow (C \rightarrow C)$
A	-	$B \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow C))$
	-	$A \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow C)))$

4. crocetta su A ed E

5. Mostrare che il tableau della negata si chiude.