Cognome ______________________________ Nome___________________

☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)**
☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)**

Esame dell'insegnamento di
LOGICA MATEMATICA - Canale A - D
2 - IX - 2008 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione binaria :

☐ A. Se R è riflessiva, allora A=B.
☐ B. Se A=B, allora R è riflessiva.
☐ C. Se A=B e $R \bullet R \subseteq R$, allora R è transitiva.
☐ D. Se R è transitiva, allora A=B e $R \bullet R \subseteq R$

2. Si consideri l'insieme P di stringhe binarie tale che

- 01 appartiene a P
- se $w \in P$ allora anche 01w appartiene a P

Si dimostri che P coincide con l'insieme di tutte le stringhe binarie di lunghezza pari che cominciano con 0 ed alternano 0 ed 1.
(SUGG.: si dimostri l'esercizio per doppia inclusione; una inclusione è banale, l'altra inclusione va dimostrata per induzione sulla lunghezza di una generica stringa)

++

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

4. Sia data la formula $(\exists y\ P(y) \wedge \exists z\ Q(z)) \rightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$. Provare con il metodo dei tableau semantici che è soddisfacibile. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa?

☐ A. <N, |P| = numeri pari , |Q| = numeri dispari>
☐ B <N, |P| = numeri positivi , |Q| = numeri negativi>
☐ C tutte le interpretazioni sono modelli
☐ D <N, |P| = multipli di 2 , |Q| = multipli di 3>

SOLUZIONI

1. Crocette su A, C e D

2. Dapprima mostriamo che ogni stringa binaria che inizia con 0 e alterna 0 e 1 appartiene a P. Sia w tale stringa. Poiché w inizia con zero e alterna 0 e 1, si deve avere che w = 01w’; inoltre, poiché in w ogni 1 è seguito da uno 0, w’ deve iniziare con 0 e deve essere anch’essa Formata da 0 e 1 alternati. Quindi, w’ $\in$ P, da cui w $\in$ P.

   Per quanto riguarda il viceversa, si procede per induzione strutturale.
   Base (w = 01): banale.
   Induzione: per ipotesi, w = 01w', per qualche w' $\in$ P. Per induzione, w' inizia con 0 e alterna 0 e 1. Quindi, anche w inizia con 0 e alterna o e 1.

3.

$$
\begin{array}{ll}
B & \vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A) \\
B & \vdash \neg A \to (A \to B) \\
B & \vdash \neg(A \to B) \to A \\
 & \vdash B \to (\neg(A \to B) \to A) \\
 & \vdash \neg(A \to B) \to (B \to A) \\
 & \vdash (A \vee B) \to (B \vee A)
\end{array}
$$

4. Si costruisca il tableau per la formula data e si noti che resta aperto. Crocette su B e D