Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D/ E-O

19 – IX – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

1. Sia R una relazione in $A \times B$ dove A è un insieme con un solo elemento e B è numerabile

   Quali delle seguenti affermazioni sicuramente NON sono mai vere?

   - ☐ A. R è un insieme finito
   - ☐ B. R è un insieme finito soltanto se simmetrica
   - ☐ C. R è un insieme infinito numerabile
   - ☐ D. R è un insieme infinito di cardinalità superiore al numerabile

2. Siano A un insieme finito di cardinalità $n \geq 2$. Mostrare che la famiglia dei suoi sottoinsiemi di cardinalità 2 ha cardinalità $(n^2\text{-}n)/2$.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

4. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) se la formula

$$\forall x \, \exists y \, \exists z \, ((P(x, y) \wedge \neg P(x, z)))$$

   è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

1. le crocette andavano messe sulle lettere B e D

2. Il passo base è ovvio: un insieme di 2 elementi può avere un solo sottinsieme di 2 elementi (se stesso). Per passare dal caso n a quello n+1, si prende $A = A' \cup \{a\}$ (dove $a \notin A'$ e $|A'| = n$) e si fanno le seguenti osservazioni:

- ogni 2-sottinsieme di A' è un 2-sottinsieme di A
- ogni elemento di A' insieme con a forma un 2-sottinsieme di A

Si noti che così caratterizziamo tutti i 2-sottinsiemi di A. Allora, i 2-sottinsiemi derivanti dalla prima osservazione sono, per induzione, $(n^2-n)/2$; i 2-sottinsiemi derivanti dalla seconda osservazione sono n. Ora, è facile dimostrare che

$$(n^2-n)/2 + n = ((n+1)^2 - (n+1)) / 2$$

3. Dimostrazione in Hilbert:

$\vdash$	$(P \to Q) \to ((P \to R) \to ((P \to Q) \to R))$	(Ax 2)
$\vdash$	$(P \to Q) \to (((P \to Q) \to R) \to (P \to R))$	(Scambio premessa)

4. La formula è soddisfacibile, Un modello è fatto da tre elementi {a,b,c} tali che (a,b) appartenga all’interpretazione di P