

Cognome _____

Nome _____

Anno di corso _____

Università di Roma „La Sapienza”
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica (A-D)

3° prova in itinere

1. Si dimostri, usando il metodo di Hilbert, la seguente formula

$$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

SOLUZIONE:

$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A$	$\vdash A \rightarrow B$
$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A$	$\vdash A$
$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A$	$\vdash B$
$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A$	$\vdash B \rightarrow C$
$A \rightarrow B, B \rightarrow C, A$	$\vdash C$
$A \rightarrow B, B \rightarrow C$	$\vdash A \rightarrow C$
$A \rightarrow B$	$\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
$A \rightarrow B$	$\vdash \neg(A \rightarrow C) \rightarrow \neg(B \rightarrow C)$
	$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg(A \rightarrow C) \rightarrow \neg(B \rightarrow C))$
	$\vdash \neg(A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow C))$
	$\vdash \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
	$\vdash ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

(Ciascuno dei quesiti esercizi non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

2. Sia data la formula $\forall x \exists y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$
Quale delle seguenti strutture è un modello per essa?

- A. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n \leq m\}$
- B. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n < m\}$
- C. $D =$ insieme delle rette del piano, $|P| = \{(r,r') \mid r \perp r'\}$
- D. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n = 2m\}$

3. Sia data la formula $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists z P(a,z)$
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A. è una tautologia
- B. è contraddittoria.
- C. è soddisfacibile.
- D. è falsa nell'interpretazione $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n \neq m\}$, $|a| = 0$

4. Verificare col metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile e fornire un modello per essa

$$\forall x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(y,x,z))$$

SOLUZIONE:

$$\begin{array}{c}
 \forall x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(y,x,z)) \\
 | \\
 \forall x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(y,x,z)) , \exists y \exists z (P(a,y,z) \wedge \neg P(y,a,z)) \\
 | \\
 \forall x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(y,x,z)) , \exists z (P(a,b,z) \wedge \neg P(b,a,z)) \\
 | \\
 \forall x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(y,x,z)) , P(a,b,c) \wedge \neg P(b,a,c) \\
 | \\
 \forall x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(y,x,z)) , P(a,b,c) , \neg P(b,a,c)
 \end{array}$$

Costruiamo dal tableau aperto della formula un possibile modello:

$$U = \mathbf{N}$$

$$|P| = \{(x,y,z) : x < y < z\}$$

Modello: D =

$$|P| =$$