

Cognome \_\_\_\_\_

Nome \_\_\_\_\_ Anno di corso \_\_\_\_\_

Esame del corso di  
**LOGICA MATEMATICA - Canale A – D**  
**18 – IX – 2006 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

- Siano  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$  funzioni. Allora
  - A.  $g \circ f$  non è in ogni caso una funzione da  $A$  a  $C$ .
  - B. Se  $f$  e  $g$  sono funzioni iniettive, anche  $g \circ f$  è una funzione iniettiva.
  - C.  $g \circ f$  è definita se e soltanto se  $f$  è suriettiva.
  - D. Se  $g$  è una funzione suriettiva, anche  $g \circ f$  è necessariamente una funzione suriettiva.
  - E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.
- Provare per induzione che, per ogni  $n > 0$ ,  $\sum_{k=1, \dots, n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ .
- Sia data la formula  $\forall x \exists y \forall z (P(x,y) \Rightarrow P(y,z))$ .
  - A. Non esiste un modello perché la formula è contraddittoria .
  - B.  $D = \text{un singolo}$  ,  $|P| =$  una relazione qualunque, è un modello.
  - C.  $D =$  insieme delle rette del piano ,  $|P| = \{(r,r') \mid r \neq r'\}$ , è un modello.
  - D.  $D = \mathbf{N}$  ,  $|P| = \{(n,m) \mid \text{esiste } k \text{ tale che } mk = n\}$ , è un modello.
- Mostrare, usando il metodo di Hilbert, che la seguente espressione è un teorema:  
$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow R))$$
- Si verifichi (con il metodo dei tableaux) che la seguente formula è valida:

$$\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \forall x \forall y \exists z P(x, z, y)$$

**SOLUZIONI:**

1. crocetta su B

2. Passo base ( $n = 1$ ): ovviamente  $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$ .

Passo induttivo (vero fino a  $n$ , da dimostrare per  $n+1$ ): per ipotesi induttiva

$$\begin{aligned}\sum_{k=1, \dots, n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1, \dots, n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1\end{aligned}$$

3. crocette sulle lettere B, C e D

4.

$$\begin{array}{ll} P \rightarrow (Q \rightarrow R) & \vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \\ P \rightarrow (Q \rightarrow R) & \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \\ P \rightarrow (Q \rightarrow R) & \vdash P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \\ & \vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow R))\end{array}$$

5. E' un'istanza dei "tre moschettieri"