Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D/ E-O

16 – II – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

FILA A

1. Sia R una relazione in $A \times B$ dove A è un insieme finito e B è numerabile
   Quali delle seguenti affermazioni NON sono vere?
   - □ A. R è un insieme finito
   - □ B. R è un insieme finito soltanto se simmetrica
   - □ C. R è un insieme infinito numerabile
   - □ D. Non si può dire nulla sulla cardinalità di R

2. Siano A e B insiemi finiti di cardinalità rispettivamente n ed m. Mostrare che l'insieme dell funzioni da A a B ha cardinalità m^n.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$P \wedge Q \rightarrow P$$

4. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) se la formula

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (\ (P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow P(x, z)))$$

   è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

1. le crocette andavano messe alle risposte A, B e C

2. Sia m un valore fissato. L'induzione procede su n

Base ($n = 0$): l'unica funzione che mappa l'insieme vuoto (A) in un insieme B è la funzione vuota. Quindi, la cardinalità richiesta è 1, cioè m^0

Induzione (vero per $n = k$, da dimostrare per $n = k+1$): Sia $A = A' \cup \{a\}$, dove $a \notin A'$. Chiaramente, $|A'| = |A| - 1 = (k+1) - 1 = k$. Per induzione, le funzioni da A' a B sono m^n. Sia f' una di tali funzioni. Da f' costruisco una $f : A \to B$ in modo che

$$f(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } x \neq a \\ b & \text{per } x = a \text{ e } b \in B \end{cases}$$

Ho m modi di scegliere $b \in B$; pertanto avrò $m \cdot m^n = m^{n+1}$ funzioni da A a B.

3. Tavole di verità, Tableau e Gentzen sono automatici. La prova con Hilbert è la seguente:

$$\begin{array}{lll}
\neg P, P & \vdash & P \to (Q \to P) \\
\neg P, P & \vdash & P \\
\neg P, P & \vdash & Q \to P \\
\neg P, P & \vdash & \neg P \to \neg Q \\
\neg P, P & \vdash & \neg P \\
\neg P, P & \vdash & \neg Q \\
\neg P & \vdash & P \to \neg Q \\
 & \vdash & \neg P \to (P \to \neg Q) \\
 & \vdash & \neg (P \to \neg Q) \to P \\
 & \vdash & P \wedge Q \to P
\end{array}$$

4. La formula è soddisfacibile ed un possibile modello è il seguente:

- l'universo U è $\{a,b\}$
- il predicato P è $\{ (a,a), (b,b), (a,b), (b,a) \}$

Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D/ E-O

16 – II – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

FILA B

1. Sia R una relazione in $A \times B$ dove A e B sono insiemi finiti
   Quali delle seguenti affermazioni NON sono vere?
   - ☐ A. R è un insieme finito
   - ☐ B. R è un insieme finito soltanto se simmetrica
   - ☐ C. R è un insieme infinito
   - ☐ D. Non si può dire nulla sulla cardinalità di R

2. Siano A e B insiemi finiti di cardinalità rispettivamente n ed m. Mostrare che l'insieme delle funzioni da A a B ha cardinalità m^n.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$P \to P \vee Q$$

4. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) se la formula

$$\neg \forall x\ \forall y\ \forall z\ (\ (P(x, y) \wedge P(y, x) \to P(x, z)))$$

   è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

1. le crocette andavano messe alle risposte B, C e D

2. come per la fila A

3. il metodo di Hilbert è il seguente:

$P , \neg P$	$\vdash$	$P \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$
$P , \neg P$	$\vdash$	P
$P , \neg P$	$\vdash$	$\neg Q \rightarrow P$
$P , \neg P$	$\vdash$	$\neg P \rightarrow Q$
$P , \neg P$	$\vdash$	$\neg P$
$P , \neg P$	$\vdash$	Q
P	$\vdash$	$\neg P \rightarrow Q$
	$\vdash$	$P \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$
	$\vdash$	$P \rightarrow P \vee Q$

4. La formula è soddisfacibile ed un possibile modello è il seguente:

- l'universo U è {a,b}
- il predicato P è { (a,b) , (b,a) }