

Cognome _____

Nome _____ Anno di corso _____

Esame del corso di
LOGICA MATEMATICA - Canale A – D
14 – VI – 2006 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Si consideri la relazione R sui naturali definita come segue:

$$n R m \text{ se e solo se } \exists k \in \mathbf{N} \text{ tale che } n + k < m$$

Si dicano tutte le proprietà di cui R gode:

- A. riflessiva
- B. antiriflessiva
- C. simmetrica
- D. antisimmetrica
- E. transitiva
- F. nessuna delle precedenti

Pertanto, R che tipo di relazione è?

- G. equivalenza
- H. ordine stretto
- I. ordine largo
- J. preordine
- K. nessuna delle precedenti

2. Provare per induzione che $n^2 > 2n + 1$; qual è il minimo valore base considerabile?

3. Sia data la formula $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$. Quale delle seguenti strutture è un modello per essa?

- A. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n < m\}$.
- B. $D = \mathbf{un\ singoletto}$, $|P| = \text{una relazione qualunque}$.
- C. $D = \text{insieme delle rette del piano}$, $|P| = \{(r,r') \mid r \text{ è distinta da } r'\}$.
- D. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid \text{esiste } k \text{ tale che } mk = n\}$

4. Mostrare, usando il metodo di Hilbert, che la seguente espressione è un teorema:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow Q)))$$

5. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) che la seguente formula è soddisfacibile:

$$(\exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y \neg P(x, y)) \rightarrow \exists y P(a, a)$$

SOLUZIONI:

1. Bastava notare che la relazione R coincide, sui naturali, con la relazione $<$; pertanto, con le crocette andavano messe sulle lettere B, E e H .
2. Il minimo valore per cui la tesi è vera è 3 . Pertanto, la dimostrazione procede nel modo seguente:

Passo base ($n = 3$): ovviamente $9 > 7$.

Per il passo induttivo, si osservi che

$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (2n + 1) + 2n + 1 > (2n + 1) + 2 = 2(n+1) + 1$
dove la prima disuguaglianza si ha per induzione e la seconda disuguaglianza si ha poichè $n \geq 3$ (e quindi $2n + 1 > 2$).

3. le crocette vanno messe sulle lettere B e D .

4.

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q, P \quad \vdash \quad Q \rightarrow (P \rightarrow Q) \\ P \rightarrow Q \quad \quad \vdash \quad P \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow Q)) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \vdash \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow Q))) \end{array}$$

5. Fare il tableaux della formula data e considerare il ramo di destra.