Sapienza Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'informatica, canale 1
1° Esonero, a.a. 2011/12

FILA A

1. Sia K un insieme qualsiasi e si considerino i seguenti insiemi: A = {1, b, K, 2}, B = {a, K, {K},{1}} e C = $\boldsymbol{P}$(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$A \cap B = \{K\}$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\{K\} \in B \setminus C$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$K \subseteq B$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$\{K\} \in C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$K \in A \cap B \cap C$	☐ Vero	☐ Falso

2. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei numeri reali, si dica se è del tipo indicato e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia numeri con stesso quadrato
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:____________________________________
B. la relazione che accoppia numeri con stessa radice quadrata reale
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:____________________________________
C. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è il logaritmo naturale del secondo
☐ a. è un ordine
☐ b. non è un ordine perché non gode della/e proprietà:____
D. la relazione che accoppia numeri che hanno lo stesso coseno
☐ a. è un ordine stretto
☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà____________________________________
E. la relazione che accoppia tutti i numeri irrazionali
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà_____________________________________
F. la relazione che accoppia numeri tali che la divisione del primo per il secondo è un numero reale
☐ a. è un ordine
☐ b. non è un ordine perché non gode della/e proprietà:____

3. Siano $f: A \to \mathbf{R}$ e $g: B \to \mathbf{R}$ due funzioni tali che $A, B \subseteq \mathbf{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} ln(x) & \text{se } x > 0 \\ e^x & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} sen(x) & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si dica per quali scelte di A e B la funzione composta $f \circ g$ è definita:

A.	$A = \mathbf{R}_+$, $B = [0, 2\pi]$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A = \mathbf{R}$, $B = [0, 2\pi]$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$A = \mathbf{R}_+$, $B = [0, \pi]$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$A = \mathbf{R}_+$, $B = [0, \pi/2]$	☐ Vero	☐ Falso

Nei casi precedenti in cui è definita, si elenchino i casi in cui è iniettiva: ______________________________

4. (svolgere l'esercizio sul retro del foglio) Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, vale che

$$\sum_{k=0\ldots n} ln(k+1) = ln((n+1)!)$$

Sapienza Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'informatica, canale 1
1° Esonero, a.a. 2011/12

FILA B

1. Sia K un insieme qualsiasi e si considerino i seguenti insiemi: A = {1, K}, B = {K, {K},{1}} e C = ***P***(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$A \cup B \subseteq C$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A = B \setminus \{\{K\}\}$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$C \cap B \neq \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$C \subseteq \boldsymbol{P}(B)$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$A \cap B = K$	☐ Vero	☐ Falso

2. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei numeri reali, si dica se è del tipo indicato e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia numeri con stesso cubo
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:____

B. la relazione che accoppia numeri con stessa radice cubica
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:____

C. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è il quadrato del secondo
☐ a. è un ordine
☐ b. non è un ordine perché non gode della/e proprietà:____

D. la relazione che accoppia numeri che hanno la stessa tangente
☐ a. è un ordine stretto
☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà____

E. la relazione che accoppia tutti i numeri trascendenti
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà____

F. la relazione che accoppia numeri tali che il primo è la parte decimale del secondo
☐ a. è un ordine
☐ b. non è un ordine perché non gode della/e proprietà:____

3. Siano $f : A \to \mathbf{R}$ e $g : B \to \mathbf{R}$ due funzioni tali che $A, B \subseteq \mathbf{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} ln(x) & \text{se } x > 0 \\ e^x & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} cos(x) & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si dica per quali scelte di A e B la funzione composta $f \circ g$ è definita:

A.	$A = \mathbf{R}$, $B = [0, 2\pi]$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A = \mathbf{R}_+$, $B = [0, \pi/2]$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$A = \mathbf{R}_+$, $B = [0, \pi]$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$A = \mathbf{R}_+$, $B = [0, 2\pi]$	☐ Vero	☐ Falso

Nei casi precedenti in cui è definita, si elenchino i casi in cui è iniettiva: ______________________________

4. (svolgere l'esercizio sul retro del foglio) Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, vale che

$$\sum_{k=0\ldots n} ln(k+1) \;=\; ln(\,(n+1)!\,)$$

SOLUZIONI:

1. FILA A: Vere A, D
   FILA B: Vera C

2. FILA A:
   - A: a;
   - B: b, perché non è riflessiva;
   - C: b, perché non è riflessiva né transitiva;
   - D: b, perché non è antiriflessiva;
   - E: b, perché non è riflessiva;
   - F: b, perché non è riflessiva.

   FILA B:
   - A: a;
   - B: a;
   - C: b, perché non è riflessiva né transitiva;
   - D: b, perché non è antiriflessiva;
   - E: b, perché non è riflessiva;
   - F: b, perché non è riflessiva.

3. FILA A: Vere la B, C e D; solo nell'ultimo caso la funzione composta è iniettiva.
   FILA B: Vere la A e B; solo nell'ultimo caso la funzione composta è iniettiva.

4. Base ($n = 0$): $\sum_{k=0\dots0} \ln(k+1) = \ln(1) = \ln(1!)$

   Induzione (vero per n, da dimostrare per n+1):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0\dots n+1} \ln(k+1) &= \sum_{k=0\dots n} \ln(k+1) + \ln(n+2) \\
&= \ln(\,(n+1)!\,) + \ln(n+2) \\
&= \ln(\,(n+2)\cdot(n+1)!\,) \\
&= \ln(\,(n+2)!\,)
\end{aligned}$$

Sapienza Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'informatica, canale 1
1° Prova intermedia, a.a. 2011/12

FILA C

1. Siano A e B due insiemi e ***P***(X) indichi l'insieme delle parti di X. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$\boldsymbol{P}(A \cup B) \supseteq \boldsymbol{P}(A) \cup \boldsymbol{P}(B)$		☐ Vero	☐ Falso
B.	$\boldsymbol{P}(A \cap B) \supset \boldsymbol{P}(A) \cap \boldsymbol{P}(B)$		☐ Vero	☐ Falso
C.	$\boldsymbol{P}(A) \cup \boldsymbol{P}(B) = \emptyset$	se $A \cup B = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$\boldsymbol{P}(A) \cap \boldsymbol{P}(B) \neq \emptyset$	se $A \cap B \neq \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$\boldsymbol{P}(A) \neq \emptyset$	se $A = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso

2. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei numeri naturali, si dica se è del tipo indicato e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia numeri la cui somma è 0.
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:____

B. la relazione che accoppia numeri con un fattore diverso da 1 in comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:____

C. la relazione che accoppia numeri dei quali la differenza tra il primo ed il secondo è ancora un numero naturale
☐ a. è un ordine
☐ b. non è un ordine perché non gode della/e proprietà:____

D. la relazione che accoppia numeri dei quali il secondo è successore del primo
☐ a. è una funzione
☐ b. non è una funzione perché non gode della/e proprietà_______________________________________

E. la relazione che accoppia tutti i numeri dei quali il primo è successore del secondo
☐ a. è una funzione
☐ b. non è una funzione perché non gode della/e proprietà_______________________________________

F. la relazione che accoppia numeri primi tra loro
☐ a. è un ordine
☐ b. non è un ordine perché non gode della/e proprietà:____

3. Sia $f{:}P \to N$ a funzione parziale definita da $f(d)=(d-2)/2$ (dove P è l'insieme dei numeri pari e N l'insieme dei numeri naturali).
Quale delle seguenti asserzioni è vera?

A.	f è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
B.	f è iniettiva, ma non suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
C.	L'inversa $g{:}N \to P$ definita da $g(n)=2n-1$ è una funzione	☐ Vero	☐ Falso
D.	L'inversa $g{:}N \to P$ definita da $g(n)=2n+2$ è una funzione	☐ Vero	☐ Falso
E.	f non è totale	☐ Vero	☐ Falso

4. (svolgere l'esercizio sul retro del foglio) Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, vale che

$$\sum_{k=1\dots n} k/2^k = 2 - (n+2)/2^n$$

Sapienza Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'informatica, canale 1
1° Prova intermedia, a.a. 2011/12

FILA D

1. Siano A e B due insiemi e ***P***(X) indichi l'insieme delle parti di X. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) \cup \boldsymbol{P}(B)$		☐ Vero	☐ Falso
B.	$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A) \cap \boldsymbol{P}(B)$		☐ Vero	☐ Falso
C.	$\boldsymbol{P}(A) \cup \boldsymbol{P}(B) \neq \emptyset$	se $A \cup B \neq \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$\boldsymbol{P}(A) \cap \boldsymbol{P}(B) = \emptyset$	se $A \cap B = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$\boldsymbol{P}(A) = \emptyset$	se $A = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso

2. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei numeri reali, si dica se è del tipo indicato e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia numeri che hanno un multiplo in comune.
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:______________________________

B. la relazione che accoppia numeri con un fattore fissato $n \neq 1$ in comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:______________________________

C. la relazione che accoppia numeri dei quali il secondo è successore del primo
☐ a. è un ordine
☐ b. non è un ordine perché non gode della/e proprietà:______________________________

D. la relazione che accoppia numeri dei quali il secondo è predecessore del primo
☐ a. è una funzione
☐ b. non è una funzione perché non gode della/e proprietà______________________________

E. la relazione che accoppia tutti i numeri primi tra loro
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà______________________________

F. la relazione che accoppia numeri dei quali il secondo è successore del primo
☐ a. è una funzione
☐ b. non è una funzione perché non gode della/e proprietà______________________________

3. Sia $f{:}D \to N$ la funzione definita da $f(d)=(d-1)/2$ (dove D è l'insieme dei numeri dispari e N l'insieme dei numeri naturali).
Quale delle seguenti asserzioni è vera?

A.	f è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
B.	f è iniettiva, ma non suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
C.	f è invertibile con inversa $g{:}N \to D$ definita da $g(n)=2n-1$	☐ Vero	☐ Falso
D.	f è invertibile con inversa $g{:}N \to D$ definita da $g(n)=2n+1$	☐ Vero	☐ Falso
E.	f è parziale	☐ Vero	☐ Falso

4. (svolgere l'esercizio sul retro del foglio) Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, vale che

$$\sum_{k=1\ldots n} k/2^k = 2 - (n+2)/\,2^n$$

SOLUZIONI:

4. FILA C: Vere A, D, E
FILA D: Vere B, C

5. FILA C:
A: b, perché non è riflessiva;
B: b, perché non è transitiva;
C: a;
D: a;
E: b, perché non è totale;
F: b, perché non è riflessiva né transitiva.

FILA D:
A: a;
B: a;
C: a;
D: a;
E: b, perché non è riflessiva;
F: a;

6. FILA C: Vere A, D, E
FILA D: Vere A, D.

4. Base (n = 1): $\sum_{k=1,1} 1/2^k = 1/2 = 2- (3/2)$

Induzione (vero per n, da dimostrare per n+1):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1\ldots n+1} k/2^k &= \sum_{k=1\ldots n} k/2^k + (n+1)/2^{n+1} \\
&= 2- (n+2)/ 2^n + (n+1)/2^{n+1} \\
&= 2 - (2(n+2) - (n+1))/2^{n+1} \\
&= 2 - (n+3)/2^{n+1}
\end{aligned}$$