Esame del corso di

**LOGICA MATEMATICA - Canale A – D**

**13 – IX – 2004 (prof.ssa Anna Labella)**

1. Siano $f$ e $g$ due funzioni da $A$ a $\wp(B)$ (cioè, l'insieme delle parti di $B$). Sia $h$ la loro unione punto a punto, cioè per ogni $x \in A$

$$h(x) = f(x) \cup g(x)$$

Quale delle seguenti affermazioni NON è vera?

□ A. $h$ è una funzione da $A$ a $\wp(B)$

□ B. se $f$ e $g$ sono iniettive allora $h$ è iniettiva

□ C. se esiste $x \in A$ tale che $y \in f(x)$ allora esiste $z \in A$ tale che $y \in h(z)$

□ D. se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$ allora $f = g = h$

2. Sia $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ un insieme e siano $B_n$ gli insiemi definiti come

$$B_1 = A$$
$$B_{n+1} = B_n \times A$$

Si dimostri per induzione su $n$ che $|B_n| = k^n$.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C))$$

Cosa si può dire dell'implicazione inversa?

4. Dimostrare con tutti i metodi usati nel corso che la seguente formula è soddisfacibile e fornire un modello

$$\exists y\, p(y) \to \neg \exists y\, p(y)$$

**SOLUZIONI:**

**Domanda 1:** l'unica affermazione che non vale è la B

**Domanda 2:**

Base: per definizione $B_1 = A$ e quindi $|B_1| = |A| = k^1 = k$

Induzione (vero fino a n, da dimostrare per n+1 ): per definizione, $B_{n+1} = B_n \times A$. Inoltre, per induzione, $| B_n | = k^n$. Ora, per definizione di prodotto cartesiano, gli elementi di $B_{n+1}$ sono coppie del tipo $( b , a )$ dove $b \in B_n$ e $a \in A$. Fissato $a$, ci sono $k^n$ elementi del tipo $( b , a )$, cioè un elemento per ogni $b \in B_n$ che, per induzione, sono $k^n$. Iterando questo ragionamento per ogni $a \in A$, e questi sono k, si ottiene che gli elementi di $B_{n+1}$ sono $k \cdot k^n = k^{n+1}$.

**Domanda 3:** Diamo la soluzione per Hilbert. Chiaramente basta riuscire a dimostrare che

$$A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B \ \vdash \ C$$

Questo si può fare come segue

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $A \rightarrow ( B \rightarrow C)$ | Assunz. |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $A \wedge B$ | Assunz. |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $\neg (B \rightarrow \neg A)$ | Definiz. di $\wedge$ |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ | Ax. 1 |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $\neg(B \rightarrow \neg A) \rightarrow A$ | Contrapposiz. |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $A$ | Modus Ponens |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $B \rightarrow C$ | Modus Ponens |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $\neg (A \rightarrow \neg B)$ | Definiz. di $\wedge$ |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ | Ax. 1 |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B$ | Contrapposiz. |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $B$ | Modus Ponens |
| $A \rightarrow ( B \rightarrow C) , \quad A \wedge B$ | $\vdash$ | $C$ | Modus Ponens |

L'implicazione inversa è ancora una tautologia, come si può facilmente verificare usando le tavole di verità.

**Domanda 4:** Modelli che soddisfano la formula data sono tutti quelli in cui nessun elemento dell'universo soddisfa il predicato $p$ . Per esempio, si potrebbe considerare

- come universo i naturali
- come predicato $p(x)$ la proprietà "$x < 0$"