Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D / E-O

13 – VI – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

FILA A

1. Sia f una funzione da A a B dove A e B sono insiemi finiti di cardinalità rispettivamente n ed m
   Quali delle seguenti affermazioni NON sono vere?
   - ☐ A. f è necessariamente suriettiva se $n>m$
   - ☐ B. f è necessariamente suriettiva se $n>0$ e se $m = 1$
   - ☐ C. f è necessariamente iniettiva se $n = 0$
   - ☐ D. f può essere suriettiva se $n>m$

2. Siano A e B insiemi finiti di cardinalità n. Mostrare che le corrispondenze biunivoche da A a B sono in numero di n!.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$P \to ((P \to \neg P) \to Q)$$

4. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) se la formula

$$\forall x\ \forall z\ \exists y\ (P(x, y) \wedge P(y, z))$$

   è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

Es.1:

La crocetta andava messa solo sulla lettera A.

Es. 2:

Siano $A = \{a_1,...,a_n\}$ e $B = \{b_1,...,b_n\}$. Per induzione su n

Base (n = 1):

l'unica biiezione da A a B è la funzione che mappa a_1 in b_1

Induzione (vero per $n \geq 1$ da dimostrare per n+1):

Associo a_1 con b_i, per $i \in \{1,...,n+1\}$. Questo può chiaramente essere fatto in n+1 modi diversi (uno per ogni $b_i \in B$). Dopodichè, considero gli insiemi $A' = \{a_2,...,a_n\}$ e $B' = \{b_1,...,b_n\} - \{b_i\}$. Banalmente, questi due insiemi hanno n elemnti. Per induzione, le biiezioni tra essi sono n!. Quindi, ho n+1 modi di scegliere ogni b_i, e per ognuno di questi modi ho n! possibili biiezioni tra i risultanti A' e B'. In totale ho (n+1)! biiezioni tra A e B.

Es. 3:

Diamo solo la prova con il metodo di Hilbert.

$$
\begin{array}{rcl}
P , P \rightarrow \neg P & \vdash & P \rightarrow \neg P \\
P , P \rightarrow \neg P & \vdash & P \\
P , P \rightarrow \neg P & \vdash & \neg P \\
P , P \rightarrow \neg P & \vdash & \neg P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \\
P , P \rightarrow \neg P & \vdash & \neg Q \rightarrow \neg P \\
P , P \rightarrow \neg P & \vdash & P \rightarrow Q \\
P , P \rightarrow \neg P & \vdash & Q \\
P & \vdash & (P \rightarrow \neg P) \rightarrow Q \\
 & \vdash & P \rightarrow ((P \rightarrow \neg P) \rightarrow Q)
\end{array}
$$

Es. 4:

E' soddisfacibile. Un possibile modello è costituito prendendo come universo un insieme con un solo elemento, per esempio 0, e come predicato P(a,b) l'uguaglianza tra a e b.

Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canali A – D / E-O

13 – VI – 2005 (prof.ssa Anna Labella)

FILA B

5. Sia f una funzione da A a B dove A e B sono insiemi finiti di cardinalità rispettivamente n ed m. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - □ A. f è necessariamente iniettiva se $n = 0$
   - □ B. f è necessariamente suriettiva se $n>m$
   - □ C. f può essere suriettiva se $n>m$
   - □ D. f è necessariamente suriettiva se $m = 1$

6. Sia A un insieme finito di cardinalità n. Mostrare che le corrispondenze biunivoche da A a A sono in numero di n!.

7. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$\neg P \rightarrow ((\neg P \rightarrow P) \rightarrow Q)$$

8. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) se la formula

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (P(x, y) \wedge P(y, z))$$

   è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

Es.1:

Le crocette andavano messe sulle lettere A e C.

Es. 2:

La soluzione si può ricavare facilmente dalla prova dell'Esercizio 2 della Fila A.

Es. 3:

Diamo solo la prova con il metodo di Hilbert.

$$
\begin{array}{rcl}
\neg P\,,\ \neg P \to P & \vdash & \neg P \to P \\
\neg P\,,\ \neg P \to P & \vdash & \neg P \\
\neg P\,,\ \neg P \to P & \vdash & P \\
\neg P\,,\ \neg P \to P & \vdash & P \to (\neg Q \to P) \\
\neg P\,,\ \neg P \to P & \vdash & \neg Q \to P \\
\neg P\,,\ \neg P \to P & \vdash & \neg P \to Q \\
\neg P\,,\ \neg P \to P & \vdash & Q \\
\neg P & \vdash & (\neg P \to P) \to Q \\
 & \vdash & \neg P \to ((\neg P \to P) \to Q)
\end{array}
$$

Es. 4:

E’ soddisfacibile. Un possibile modello è costituito prendendo come universo un insieme con un solo elemento, per esempio 0, e come predicato $P(a,b)$ l’uguaglianza tra a e b.