Università di Roma "La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica, canale A-D
1° Prova, a.a. 2007/08 – FILA A

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {a,b,c}, B = { Ø,{a},{b,c},a} e C = { {a,b,c},b, Ø,a}.
Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$C \cap B = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A \subseteq C \cup B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$B \setminus C \neq \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$b \in B \cup C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$\emptyset \in B \cap C$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \cup B \neq \emptyset$. Allora

A.	A e B devono essere entrambi diversi da Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
E.	se $B \neq \emptyset$, allora A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'insieme dei numeri naturali si dica se è di un certo tipo e perché, eventualmente, non lo è:

A. la relazione che accoppia due numeri se hanno un multiplo comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:____________________________________

B. la relazione che accoppia due numeri se la loro somma è uguale a 5
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:____________________________________

C. la relazione che mette in relazione un certo numero con un multiplo non banale
☐ a. è un ordine debole
☐ b. non è un ordine debole perchè non gode della/e proprietà:__________________________________

D. la relazione che mette in relazione ogni numero con ogni suo multiplo non banale
☐ a. è un ordine stretto
☐ b. non è un ordine stretto perchè non gode della/e proprietà____________________________________

4. Siano $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ tali che $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \sqrt{x}$ (dove √ calcola la radice quadrata positiva).
Si considerino $g \circ f$ e $f \circ g$ (dove $g \circ f$ applica prima f e poi g) e si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$g \circ f$ non è una funzione	☐ Vero	☐ Falso
B.	$g \circ f$ è una funzione e il suo dominio è $\mathbf{R}^+$	☐Vero	☐ Falso
C.	$g \circ f$ è una funzione e il suo codominio è $\mathbf{R}^+$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$f \circ g$ non è una funzione	☐ Vero	☐ Falso
E.	$f \circ g$ è una funzione e il suo dominio è $\mathbf{R}^+$	☐ Vero	☐ Falso
F.	$f \circ g$ è una funzione e il suo codominio è $\mathbf{R}^+$	☐ Vero	☐ Falso

5. Vista come insieme di coppie, una funzione f sui naturali è

A.	un insieme finito	☐ Vero	☐ Falso
B.	un insieme numerabile	☐ Vero	☐ Falso
C.	un insieme continuo	☐ Vero	☐ Falso
D.	non si può dire senza conoscere la legge di f	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=1,\dots,n} i^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

SOLUZIONI:

1. risposte vere: C, D, E.

2. risposte vere: B, C, E.

3. risposte:
   A: a
   B: b (non gode di riflessività e transitività)
   C: b (non gode di riflessività)
   D: a

4. risposte vere: A, E

5. risposte vere: B

6. Per n = 1 si ottiene $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$ che è uguale a $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$.
   Per il passo induttivo, si ha

$$\sum_{i=1,\dots,n+1} i^3 = \sum_{i=1,\dots,n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2 (n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

Università di Roma "La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica, canale A-D
1° Prova, a.a. 2007/08 – FILA B

Nome e Cognome ____ **Matricola** _____________

Anno di corso _____________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {a,b,c}, B = { Ø,{a},{b,c},a} e C = ***P***(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$A \cap B = Ø$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A \in C \setminus B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$B \setminus C = Ø$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$b \in B \cup C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$Ø \in B \cap C$	☐ Vero	☐ Falso
F.	$B \cap C = Ø$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \times B \neq Ø$. Allora

A.	A e B devono essere diversi da Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
E.	se $B \neq Ø$, allora A deve essere uguale a Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'insieme dei libri di una biblioteca si dica se è di un certo tipo e perché, eventualmente, non lo è:

A. la relazione che accoppia libri che hanno un argomento in comune
- ☐ a. è un'equivalenza
- ☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:____________________________________

B. la relazione che accoppia libri con la copertina dello stesso colore
- ☐ a. è un'equivalenza
- ☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:____________________________________

C. la relazione che mette in relazione un certo libro con un altro che ha un maggior numero di pagine
- ☐ a. è un ordine stretto
- ☐ b. non è un ordine stretto perchè non gode della/e proprietà:__________________________________

D. la relazione che mette in relazione ogni libro con ogni altro che ha un maggior numero di pagine
- ☐ a. è un ordine debole
- ☐ b. non è un ordine debole perchè non gode della/e proprietà___________________________________

4. Sia f: A → B iniettiva, con A e B insiemi finiti. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	si può sempre trovare un sottoinsieme di B per cui f risulti suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
B.	l'immagine di f contiene lo stesso numero di elementi di A	☐ Vero	☐ Falso
C.	non può essere che B abbia meno elementi di A	☐ Vero	☐ Falso
D.	deve essere che $\mathrm{Im}(f) \cap A = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
E.	può essere che $\mathrm{Im}(f) \cap B = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
F.	non può essere che $B \subseteq \mathrm{Im}(f)$	☐ Vero	☐ Falso

5. Siano f: **A** → **B** e g : **B** → **A**; come insiemi di coppie, la funzione $g \circ f$ (dove $g \circ f$ applica prima f e poi g)

A.	ha la stessa cardinalità di f	☐ Vero	☐ Falso
B.	ha la stessa cardinalità di g	☐ Vero	☐ Falso
C.	ha la stessa cardinalità di $f \circ g$	☐ Vero	☐ Falso
D.	non si può dire senza conoscere le leggi di f e g	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri che, per ogni n ∈ **N**, $\sum_{i=1,\dots,n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

SOLUZIONI:

1. risposte vere: B, E.

2. risposte vere: A, C, D.

3. risposte:
   - A: b (non gode di transitività)
   - B: a
   - C: a
   - D: b (non gode di riflessività)

4. risposte vere: A, B, C, E

5. risposte vere: A

6. Per n = 1 si ottiene $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ che è uguale a $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

   Per il passo induttivo, si ha

$$\sum_{i=1,..,n+1} \frac{1}{i\,(i+1)} = \sum_{i=1,..,n} \frac{1}{i\,(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)\ +\ 1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Università di Roma "La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica, canale A-D
1° Prova, a.a. 2007/08 – FILA C

Nome e Cognome ____ **Matricola** _____________

Anno di corso _____________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {a,b,c}, B = { Ø,{a},{b,c},a} e C = { {a,b,c},b, Ø,a}.
Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$C \cap B \neq Ø$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A \in C \setminus B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$B \setminus C \neq Ø$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$Ø \subseteq B \cap C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$Ø \in B \cap C$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \cup B = Ø$. Allora

A.	A e B devono essere diversi da Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	A e B devono essere entrambi uguali a Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	se $B \neq Ø$, allora A deve essere uguale a Ø	☐ Vero	☐ Falso
E.	se $B \neq Ø$, allora A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'insieme dei numeri naturali si dica se è di un certo tipo e perché, eventualmente, non lo è:

A. la relazione che accoppia due numeri se hanno un divisore comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:___________________________________

B. la relazione che accoppia due numeri se sono mutuamente primi
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:___________________________________

C. la relazione che mette in relazione ogni numero con un suo addendo proprio
☐ a. è un ordine debole
☐ b. non è un ordine debole perchè non gode della/e proprietà:__________________________________

D. la relazione che mette in relazione ogni numero con tutti i suoi divisori
☐ a. è un ordine debole
☐ b. non è un ordine debole perchè non gode della/e proprietà___________________________________

4. Siano $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f(x) = \text{cotan}(x)$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ (dove $\sqrt[3]{\ }$ calcola la radice cubica).
Si considerino $g \circ f$ e $f \circ g$ (dove $g \circ f$ applica prima f e poi g) e si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$g \circ f$ non è una funzione	☐ Vero	☐ Falso
B.	$g \circ f$ è una funzione e il suo dominio è **R**	☐Vero	☐ Falso
C.	$g \circ f$ è una funzione e il suo codominio è **R**	☐ Vero	☐ Falso
D.	$f \circ g$ non è una funzione	☐ Vero	☐ Falso
E.	$f \circ g$ è una funzione e il suo dominio è **R**	☐ Vero	☐ Falso
F.	$f \circ g$ è una funzione e il suo codominio è **R**	☐ Vero	☐ Falso

5. Vista come insieme di coppie, una funzione f sugli interi è

A.	un insieme numerabile	☐ Vero	☐ Falso
B.	un insieme continuo	☐ Vero	☐ Falso
C.	un insieme finito	☐ Vero	☐ Falso
D.	non si può dire senza conoscere la legge di f	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=1,\ldots,n} i^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$

SOLUZIONI:

1. tutte le risposte sono vere.

2. risposte vere: B, C, D, E.

3. risposte:
   A: b (non gode di transitività)
   B: b (non gode di riflessività e transitività)
   C: b (non gode di riflessività)
   D: a

4. risposte vere: B, C, E, F

5. risposte vere: A

6. Per n = 1 si ottiene $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$ che è uguale a $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

   Per il passo induttivo, si ha

$$\sum_{i=1,\ldots,n+1} i^3 = \sum_{i=1,\ldots,n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Università di Roma "La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica, canale A-D
1° Prova, a.a. 2007/08 – FILA D

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {a,b,c}, B = { Ø,{a},{b,c},a} e C = ***P***(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$A \cap B = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A \subset B \setminus B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$B \setminus C \neq \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$b \in B \cup C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$B \cap C = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \times B \neq \emptyset$. Allora

A.	A e B devono essere diversi da Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	se B ≠ Ø, allora A deve essere diverso da Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	se B ≠ Ø, allora A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	se B ≠ Ø, allora A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
E.	se B ≠ Ø, allora A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'insieme dei libri di una biblioteca si dica se è di un certo tipo e perché, eventualmente, non lo è:

A. la relazione che accoppia libri che hanno almeno una pagina uguale
- ☐ a. è un'equivalenza
- ☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:_____________________________________

B. la relazione che accoppia libri dello stesso formato
- ☐ a. è un'equivalenza
- ☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:_____________________________________

C. la relazione che mette in relazione un certo libro con un altro che ha un minor numero di pagine
- ☐ a. è un ordine stretto
- ☐ b. non è un ordine stretto perchè non gode della/e proprietà:___________________________________

D. la relazione che mette in relazione ogni libro con ogni altro che ha un minor numero di pagine
- ☐ a. è un ordine debole
- ☐ b. non è un ordine debole perchè non gode della/e proprietà____________________________________

4. Sia f : A → B suriettiva, con A e B insiemi finiti. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	si può sempre trovare un sottoinsieme di A per cui f risulti iniettiva	☐ Vero	☐ Falso
B.	l'immagine di f contiene lo stesso numero di elementi di A	☐ Vero	☐ Falso
C.	non può essere che B abbia meno elementi di A	☐ Vero	☐ Falso
D.	deve essere che $\mathrm{Im}(f) \cap A = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
E.	può essere che $\mathrm{Im}(f) \cap B = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
F.	non può essere che $\mathrm{Im}(f) \subset B$	☐ Vero	☐ Falso

5. Siano f : **A** → **B** e g : **B** → **A**; come insiemi di coppie, la funzione $f \circ g$ (dove $f \circ g$ applica prima g e poi f)

A.	ha la stessa cardinalità di f	☐ Vero	☐ Falso
B.	ha la stessa cardinalità di g	☐ Vero	☐ Falso
C.	ha la stessa cardinalità di $g \circ f$	☐ Vero	☐ Falso
D.	non si può dire senza conoscere le leggi di f e g	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri che, per ogni n ∈ **N**, $\sum_{i=1,\dots,n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

SOLUZIONI:

1. risposte vere: C.

2. risposte vere: A, B, D, E.

3. risposte:
   A: b (non gode di transitività)
   B: a
   C: a
   D: b (non gode di riflessività)

4. risposte vere: A, E, F

5. risposte vere: B

6. Per n = 1 si ottiene $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ che è uguale a $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
   Per il passo induttivo, si ha

$$\sum_{i=1,\dots,n+1} \frac{1}{i\,(i+1)} = \sum_{i=1,\dots,n} \frac{1}{i\,(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$