**Cognome** ________________________________ **Nome**______________________________

# LOGICA MATEMATICA - Canale A – D
# 11 – IX – 2007 (prof.ssa Anna Labella)

**(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)**

1. Sia $f$: A $\to$ B una funzione iniettiva per A,B $\subseteq$ **R** e sia $g(x) = (f(x))^2$. Allora

- ☐ A. Se B = **N** allora la funzione $g$: A $\to$ **R** è iniettiva
- ☐ B. Se B = **Z** allora la funzione $g$: A $\to$ **R** è iniettiva
- ☐ C. $g$ manda elementi di A in elementi di B
- ☐ D. se B $\subseteq$ **Z** allora l'immagine di $g$ è un sottinsieme di **Z**

2. Si consideri l'insieme P di stringhe binarie tale che

- la parola vuota ($\varepsilon$) appartiene a P
- se w $\in$ P allora anche 0w0 e 1w1 appartengono a P

Si dimostri per induzione matematica che tutte le stringhe in P sono palindrome (cioè sono uguali se lette da sinistra o da destra). Su quale parametro va fatta l'induzione matematica?

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

3. Provare con il metodo di Hilbert che la segente formula è un teorema

$$(A \to (B \vee C)) \to ((A \to B) \vee (A \to C))$$

4. Sia data la formula $\exists x\, P(x) \to \neg\exists y\, Q(y)$. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa.

- ☐ A (**N**, |P| = essere pari, |Q| = essere dispari)
- ☐ B (**N**, |P| = essere negativo, |Q| = essere dispari)
- ☐ C ({*}, |P| = Ø, |Q| = Ø)
- ☐ D ({*}, |P| qualunque, |Q| = complementare di |P|)
- ☐ E (**N**, |P| qualunque, |Q| = complementare di |P|)

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è valida

$$\forall x\, (P(x) \to Q(y)) \to (\exists x\; P(x) \to Q(y))$$

**SOLUZIONI:**

1. crocette su A e D

2. Sia $|w|$ la lunghezza della parola w; l'induzione va fatta su $|w|/2$

   Base ($|w|/2 = 0$): allora $|w| = 0$ e quindi $w = \varepsilon$, che è palindroma

   Induzione (vero per $|w|/2 = k$, da dimostrare per $|w|/2 = k+1$)

      Deve essere che $w = 0w'0$ oppure $w = 1w'1$, per w' appartenente a P.

      Chiaramente, $|w'| = |w|-2$, da cui $|w'|/2 = |w|/2 – 1$;

      per induzione, w' è palindroma e, banalmente, w è palindroma.

3.

| | | |
|---|---|---|
| $A \to (\neg B \to C), A, \neg C, A$ | $\vdash$ | $A \to (\neg B \to C)$ |
| $A \to (\neg B \to C), A, \neg C, A$ | $\vdash$ | $A$ |
| $A \to (\neg B \to C), A, \neg C, A$ | $\vdash$ | $\neg B \to C$ |
| $A \to (\neg B \to C), A, \neg C, A$ | $\vdash$ | $\neg C \to B$ |
| $A \to (\neg B \to C), A, \neg C, A$ | $\vdash$ | $\neg C$ |
| $A \to (\neg B \to C), A, \neg C, A$ | $\vdash$ | $B$ |
| $A \to (\neg B \to C), A, \neg C$ | $\vdash$ | $A \to B$ |
| $A \to (\neg B \to C), A$ | $\vdash$ | $\neg C \to (A \to B)$ |
| $A \to (\neg B \to C), A$ | $\vdash$ | $\neg(A \to B) \to C$ |
| $A \to (\neg B \to C)$ | $\vdash$ | $A \to (\neg(A \to B) \to C)$ |
| $A \to (\neg B \to C)$ | $\vdash$ | $\neg(A \to B) \to (A \to C)$ |
| | $\vdash$ | $(A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(A \to B) \to (A \to C))$ |
| | $\vdash$ | $(A \to (B \vee C)) \to ((A \to B) \vee (A \to C))$ |

4. crocette su C e D

5. verificare che il tableaux della negata è chiuso