Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canale A – D

10 – VI – 2004 (prof.ssa Anna Labella)

Compito A

1. Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni e siano $A \cap C = \emptyset$. Quale delle seguenti affermazioni NON è vera?
   - ☐ A. $f \cup g$ è una funzione da $A \cup C$ a $B \cup D$
   - ☐ B. se f e g sono iniettive allora $f \cup g$ è iniettiva
   - ☐ C. se f e g sono suriettive allora $f \cup g$ è suriettiva
   - ☐ D. se f e g sono l'identità su A e su C rispettivamente, allora $f \cup g$ è l'identità su $A \cup C$

2. Sia $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ una successione di numeri naturali tale che $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n) / 2$. Si dimostri che A è una successione costante.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$(A \to C) \lor ((A \to (B \to C)) \to (A \land \neg B))$$

4. Si dica se la formula

$$\forall x\, \exists y\, .\, (P(v, x) \to P(y, x))$$

   è soddisfacibile. In caso positivo, se ne fornisca un modello.

SOLUZIONI:

Domanda 1: l'unica affermazione che non vale è la B

Domanda 2: basta dimostrare per induzione su n che $a_n = 1$ per ogni n .

Base: per definizione $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$

Induzione (vero fino a $n+1$, da dimostrare per $n+2$): per induzione $a_n = a_{n+1} = 1$. Per definizione, $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n) / 2$, da cui $a_{n+2} = 1$, come richiesto

Domanda 3: tavole di verità, tableaux e Gentzen sono da costruire in maniera automatica. La dimostrazione in Hilbert è la seguente:

$$
\begin{array}{rcl}
\neg (A \to C) , A \to (B \to C) & \vdash & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
\neg (A \to C) , A \to (B \to C) & \vdash & A \to (B \to C) \\
\neg (A \to C) , A \to (B \to C) & \vdash & A \to (B \to C) \\
\neg (A \to C) , A \to (B \to C) & \vdash & (A \to B) \to (A \to C) \\
\neg (A \to C) , A \to (B \to C) & \vdash & \neg (A \to C) \to \neg (A \to B) \\
\neg (A \to C) , A \to (B \to C) & \vdash & \neg (A \to C) \\
\neg (A \to C) , A \to (B \to C) & \vdash & \neg (A \to B) \\
\neg (A \to C) & \vdash & (A \to (B \to C)) \to \neg (A \to B) \\
 & \vdash & \neg (A \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to \neg (A \to B)) \\
 & \vdash & (A \to C) \vee ((A \to (B \to C)) \to (A \wedge \neg B))
\end{array}
$$

Domanda 4: La formula è soddisfacibile. Un possibile modello è il seguente:

- l'universo è l'insieme dei reali non negativi
- la costante v viene associata con lo 0
- il predicato $P(a,b)$ è definito come $a < b$

Con questa interpretazione, la formula dice che per ogni reale strettamente positivo (x) posso trovare un altro reale (y) tale che $0 < y < x$.