Esame di
Logica Matematica
Appello del 10-I-2003

1. Dimostrare usando l'induzione che la somma di due numeri naturali è commutativa.

Dimostrazione. Dati $n, m \in N$, la dimostrazione che $n + m = m + n$ e' data per induzione su n ed m. L'operazione di somma puo' essere pensata come una funzione che varia prima su n, vista come variabile, e considerando m un parametro, e poi viceversa. Dunque, per svolgere la dimostrazione, possiamo scegliere m come variabile; la dimostrazione puo' essere completata ripetendo lo stesso procedimento su n.
Caso base: $m = 0$. Dobbiamo dimostrare che: $n + 0 = 0 + n$. Per la definizione di somma, $n + 0 = n$; dobbiamo dunque dimostrare che $n = 0 + n$: la dimostrazione e' per induzione su n.

- *Caso base*: $n = 0$. Per la def. di somma: $0 = 0 + 0$, c.v.d.
- *Passo induttivo*: $n = s(n)$, dove s e' la funzione successore. Dobbiamo dimostrare che: $(n = 0 + n) \rightarrow (s(n) = 0 + s(n))$. Per la definizione di funzione successore, e per l'ipotesi induttiva, $0 + s(n) = s(0 + n) = s(n)$, c.v.d.

Passo induttivo: $m = s(m)$. Dobbiamo dimostrare che:
$(n + m = m + n) \quad \rightarrow \quad n + s(m) = s(m) + n$
Per la definizione di funzione successore, $n + s(m) = s(m + n) = m + s(n) = m + (n + 1)$;
per la definizione di funzione successore, e per la proprieta' associativa del +, $s(m) + n = (m + 1) + n = m + (1 + n)$;
dobbiamo dunque dimostrare che $m + (n + 1) = m + (1 + n)$, ovvero che $n + 1 = 1 + n$. La dimostrazione e' per induzione su n, riscritto come k.

- *Caso base*: $k = 0$. Dobbiamo dimostrare che: $0 + 1 = 1 + 0$. Per la def. di funzione successore e la def. di somma, $0 + 1 = 0 + s(0) = s(0 + 0) = s(0) = 1 = 1 + 0$, c.v.d.
- *Passo induttivo*: $k = s(k)$. Dobbiamo dimostrare che: $k + 1 = 1 + k \rightarrow s(k) + 1 = 1 + s(k)$. Per la def. di funzione successore, $s(k) + 1 = (k + 1) + 1$; per la def. di funzione successore, e per la proprieta' associativa del +, $1 + s(k) = 1 + (k + 1) = (1 + k) + 1$; dobbiamo dunque dimostrare che $(k + 1) + 1 = (1 + k) + 1$. Per ipotesi induttiva, $(k + 1) = (1 + k)$: dunque $(k + 1) + 1 = (k + 1) + 1$, c.v.d.

2. La relazione che associa ad un numero reale le sue radici quadrate è:

☐ A. una relazione d'ordine sui reali.
■ B una funzione dai reali al prodotto cartesiano C x C, dove C è l'insieme dei numeri complessi.
☐ C. una funzione dai reali ai reali.
☐ D. Una relazione di equivalenza su C, dove C è l'insieme dei numeri complessi.
☐ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

3. La relazione che associa ad una retta del piano la retta ad essa perpendicolare è:

☐ A. una relazione d'ordine sull'insieme delle rette del piano.
☐ B una relazione transitiva sull'insieme delle rette del piano.
☐ C. una funzione dall'insieme delle rette del piano in se stesso.
☐ D. Una relazione di equivalenza sull'insieme delle rette del piano.
■ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

4. La relazione che associa ad una retta dello spazio ogni retta ad essa perpendicolare è:

☐ A. una relazione d'ordine sull'insieme delle rette del piano.
☐ B una funzione dall'insieme delle rette dello spazio in se stesso.

□ C. una funzione dall'insieme delle rette del piano in se stesso.
■ D. Una relazione simmetrica sull'insieme delle rette dello spazio.
□ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

5. La relazione che associa ad una retta dello spazio ogni retta ad essa parallela è:

□ A. una relazione d'ordine sull'insieme delle rette del piano.
□ B una funzione dall'insieme delle rette dello spazio in se stesso.
□ C. una funzione dall'insieme delle rette del piano in se stesso.
■ D. Una relazione di equivalenza sull'insieme delle rette dello spazio.
□ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

6. Dimostrare con tutti i metodi usati nel corso che la seguente formula è valida

$$(A \land \neg B) \lor (B \lor \neg A)$$

Tavole di verita'

A	B	¬ A	¬ B	(A ∧ ¬ B)	(B ∨ ¬ A)	(A ∧ ¬ B) ∨ (B ∨ ¬ A)
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Tableaux

$\neg ((A \land \neg B) \lor (B \lor \neg A))$

$\neg (A \land \neg B) \land \neg (B \lor \neg A)$

$\neg A \lor B, \neg B, A$

$\neg A, \neg B, A$ X $B, \neg B, A$ X

Gentzen

$\mathcal{A}$ *(assioma)* $\mathcal{A}$

$A, B, \neg A$ $\neg B, B, \neg A$

$(A \land \neg B), B, \neg A)$

$(A \land \neg B), (B \lor \neg A)$

$(A \land \neg B) \lor (B \lor \neg A)$

7. Dimostrare con tutti i metodi usati nel corso che la seguente formula è soddisfacibile e fornire un modello

$$\forall x\, \exists y\, \exists z\;\; p(x,y,z) \;\rightarrow\;\; \exists y\, \exists z\, \forall x\; p(x,y,z)$$

Tableaux

$$\forall x\, \exists y\, \exists z\;\; p(x,y,z) \;\rightarrow\;\; \exists y\, \exists z\, \forall x\; p(x,y,z)$$

$$\neg\forall x\, \exists y\, \exists z\;\; p(x,y,z) \qquad\qquad \exists y\, \exists z\, \forall x\; p(x,y,z)$$

Il tableaux rimane aperto, poiche' le foglie sono costituite da formule che non possono portare a letterali complementari, e dunque la formula e' soddisfacibile. Si noti che per dimostrare la soddisfacibilita' della formula mediante i tableaux, la formula *non* va negata.

Modello
Un possibile modello e' dato da M = (N, p), dove N sono i numeri naturali (zero incluso), e p e' il predicato ternario $p(x, y, z)$: $x \geq y + z$. Si puo' immediatamente verificare che il modello soddisfa la formula: infatti, $\forall x\, \exists y\, \exists z\;\; (x \geq y + z)$ e' vera (dato un qualsiasi numero, esiste sempre una coppia di numeri che, sommati, sono inferiori ad esso), e $\exists y\, \exists z\, \forall x\; (x \geq y + z)$ e' vera per $y = 0$ e $z = 0$.

8. Cosa si può dire della seguente?

$$\exists y\, \exists z\, \forall x\;\; p(x,y,z) \;\rightarrow\;\; \forall x\, \exists y\, \exists z\; p(x,y,z)$$

Risposta. La formula puo' essere valida, soddisfabile, o insoddisfacibile. Se una formula e' valida, e' anche soddisfacibile; dunque proviamo a dimostrare che la formula e' valida mediante tableaux e Gentzen.

Tableaux

$$\neg\, (\exists y\, \exists z\, \forall x\;\; p(x,y,z) \;\rightarrow\;\; \forall x\, \exists y\, \exists z\; p(x,y,z))$$

$$\exists y\, \exists z\, \forall x\;\; p(x,y,z)\;\;,\quad \neg\forall x\, \exists y\, \exists z\; p(x,y,z)$$

$$\exists z\, \forall x\;\; p(x,a,z)\;\;,\quad \neg\forall x\, \exists y\, \exists z\; p(x,y,z)$$

$$\forall x\;\; p(x,a,b)\;\;,\quad \neg\forall x\, \exists y\, \exists z\; p(x,y,z)$$

$$\forall x\;\; p(x,a,b)\;\;,\quad \neg\exists y\, \exists z\; p(c,y,z)$$

$$\forall x\;\; p(x,a,b)\;\;,\;\; p(c,a,b)\;\;,\;\; \neg\exists y\, \exists z\; p(c,y,z)$$

$$\forall x\ p(x,a,b)\ ,\ p(c,a,b)\ ,\ \neg\exists y\ \exists z\ p(c,y,z)\ ,\ \neg\exists z\ p(c,a,z)$$

$$\forall x\ p(x,a,b)\ ,\ \underline{p(c,a,b)}\ ,\ \neg\exists y\ \exists z\ p(c,y,z)\ ,\ \neg\exists z\ p(c,a,z)\ ,\ \underline{\neg p(c,a,b)}$$

X

Gentzen

$$\mathcal{A}$$

$$\ldots,\ \underline{\neg p(d,b,c)}\ ,\ \ldots,\ \forall x\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)\ ,\ \underline{p(d,b,c)}\ ,\ p(a,b,c)$$

$$\ldots,\ \neg p(d,b,c)\ ,\ \ldots,\ \forall x\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)\ ,\ p(a,b,c)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ ,\ \neg\exists z\ \forall x\ p(x,b,z)\ ,\ \neg\forall x\ p(x,b,c)\ ,\ \neg p(d,b,c)\ ,\ \ldots,\ p(a,b,c)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ ,\ \neg\exists z\ \forall x\ p(x,b,z)\ ,\ \neg\forall x\ p(x,b,c)\ ,\ \ldots,\ p(a,b,c)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ ,\ \neg\exists z\ \forall x\ p(x,b,z)\ ,\ \ldots,\ p(a,b,c)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ ,\ \ldots,\ p(a,b,c)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ ,\ \forall x\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)\ ,\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)\ ,\ \exists z\ p(a,b,z)\ ,\ p(a,b,c)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ ,\ \forall x\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)\ ,\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)\ ,\ \exists z\ p(a,b,z)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ ,\ \forall x\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)\ ,\ \exists y\ \exists z\ p(a,y,z)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ ,\ \forall x\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)$$

$$\neg\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ \vee\ \forall x\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)$$

$$\exists y\ \exists z\ \forall x\ p(x,y,z)\ \rightarrow\ \forall x\ \exists y\ \exists z\ p(x,y,z)$$

La formula e' valida. Si noti che questa formula e' l'inverso della formula dell'esercizio precedente, cioe' antecedente e conseguente dell'implicazione sono scambiati; tuttavia, mentre la formula dell'esercizio 7 e' solo soddisfacibile, quella dell'esercizio 8 e' valida.

9. E' vero che dalle prime due proposizioni deriva la terza (usare la risoluzione)?

    a. Se mi alzerò tardi, perderò l'autobus
    b. Sicuramente domattina mi alzerò tardi o non farò colazione
    c. Allora perderò l'autobus