

**Esame di  
Logica Matematica  
Appello del 10-I-2003**

1. Dimostrare usando l'induzione che la somma di due numeri naturali è commutativa.

**Dimostrazione.** Dati  $n, m \in \mathbb{N}$ , la dimostrazione che  $n + m = m + n$  è data per induzione su  $n$  ed  $m$ . L'operazione di somma può essere pensata come una funzione che varia prima su  $n$ , vista come variabile, e considerando  $m$  un parametro, e poi viceversa. Dunque, per svolgere la dimostrazione, possiamo scegliere  $m$  come variabile; la dimostrazione può essere completata ripetendo lo stesso procedimento su  $n$ .

*Caso base:*  $m = 0$ . Dobbiamo dimostrare che:  $n + 0 = 0 + n$ . Per la definizione di somma,  $n + 0 = n$ ; dobbiamo dunque dimostrare che  $n = 0 + n$ : la dimostrazione è per induzione su  $n$ .

- *Caso base:*  $n = 0$ . Per la def. di somma:  $0 = 0 + 0$ , c.v.d.
- *Passo induttivo:*  $n = s(n)$ , dove  $s$  è la funzione successore. Dobbiamo dimostrare che:  $(n = 0 + n) \rightarrow (s(n) = 0 + s(n))$ . Per la definizione di funzione successore, e per l'ipotesi induttiva,  $0 + s(n) = s(0 + n) = s(n)$ , c.v.d.

*Passo induttivo:*  $m = s(m)$ . Dobbiamo dimostrare che:

$$(n + m = m + n) \rightarrow n + s(m) = s(m) + n$$

Per la definizione di funzione successore,  $n + s(m) = s(m + n) = m + s(n) = m + (n + 1)$ ;

per la definizione di funzione successore, e per la proprietà associativa del  $+$ ,  $s(m) + n = (m + 1) + n = m + (1 + n)$ ;

dobbiamo dunque dimostrare che  $m + (n + 1) = m + (1 + n)$ , ovvero che  $n + 1 = 1 + n$ . La dimostrazione è per induzione su  $n$ , riscritto come  $k$ .

- *Caso base:*  $k = 0$ . Dobbiamo dimostrare che:  $0 + 1 = 1 + 0$ . Per la def. di funzione successore e la def. di somma,  $0 + 1 = 0 + s(0) = s(0 + 0) = s(0) = 1 = 1 + 0$ , c.v.d.
- *Passo induttivo:*  $k = s(k)$ . Dobbiamo dimostrare che:  $k + 1 = 1 + k \rightarrow s(k) + 1 = 1 + s(k)$ . Per la def. di funzione successore,  $s(k) + 1 = (k + 1) + 1$ ; per la def. di funzione successore, e per la proprietà associativa del  $+$ ,  $1 + s(k) = 1 + (k + 1) = (1 + k) + 1$ ; dobbiamo dunque dimostrare che  $(k + 1) + 1 = (1 + k) + 1$ . Per ipotesi induttiva,  $(k + 1) = (1 + k)$ : dunque  $(k + 1) + 1 = (k + 1) + 1$ , c.v.d.

2. La relazione che associa ad un numero reale le sue radici quadrate è:

- A. una relazione d'ordine sui reali.
- B. una funzione dai reali al prodotto cartesiano  $C \times C$ , dove  $C$  è l'insieme dei numeri complessi.
- C. una funzione dai reali ai reali.
- D. Una relazione di equivalenza su  $C$ , dove  $C$  è l'insieme dei numeri complessi.
- E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

3. La relazione che associa ad una retta del piano la retta ad essa perpendicolare è:

- A. una relazione d'ordine sull'insieme delle rette del piano.
- B. una relazione transitiva sull'insieme delle rette del piano.
- C. una funzione dall'insieme delle rette del piano in se stesso.
- D. Una relazione di equivalenza sull'insieme delle rette del piano.
- E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

4. La relazione che associa ad una retta dello spazio ogni retta ad essa perpendicolare è:

- A. una relazione d'ordine sull'insieme delle rette del piano.
- B. una funzione dall'insieme delle rette dello spazio in se stesso.

- C. una funzione dall'insieme delle rette del piano in se stesso.
- D. Una relazione simmetrica sull'insieme delle rette dello spazio.
- E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

5. La relazione che associa ad una retta dello spazio ogni retta ad essa parallela è:

- A. una relazione d'ordine sull'insieme delle rette del piano.
- B. una funzione dall'insieme delle rette dello spazio in se stesso.
- C. una funzione dall'insieme delle rette del piano in se stesso.
- D. Una relazione di equivalenza sull'insieme delle rette dello spazio.
- E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

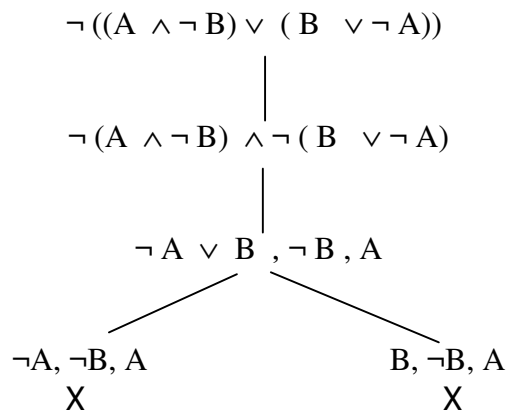
6. Dimostrare con tutti i metodi usati nel corso che la seguente formula è valida

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$$

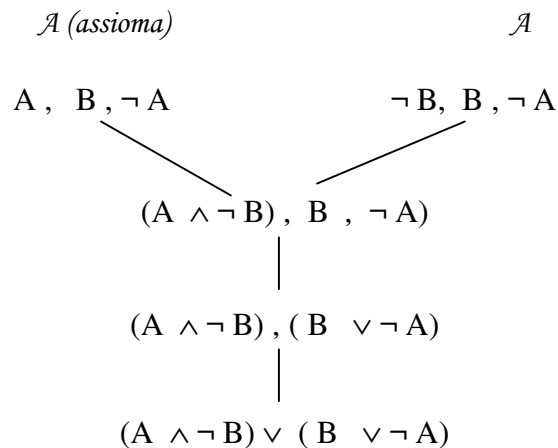
**Tavole di verita'**

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$(B \vee \neg A)$	$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

**Tableaux**



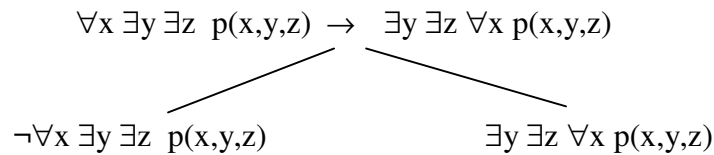
**Gentzen**



7. Dimostrare con tutti i metodi usati nel corso che la seguente formula è soddisfacibile e fornire un modello

$$\forall x \exists y \exists z p(x,y,z) \rightarrow \exists y \exists z \forall x p(x,y,z)$$

**Tableaux**



Il tableaux rimane aperto, poiché le foglie sono costituite da formule che non possono portare a letterali complementari, e dunque la formula è soddisfacibile. Si noti che per dimostrare la soddisfacibilità della formula mediante i tableaux, la formula *non* va negata.

**Modello**

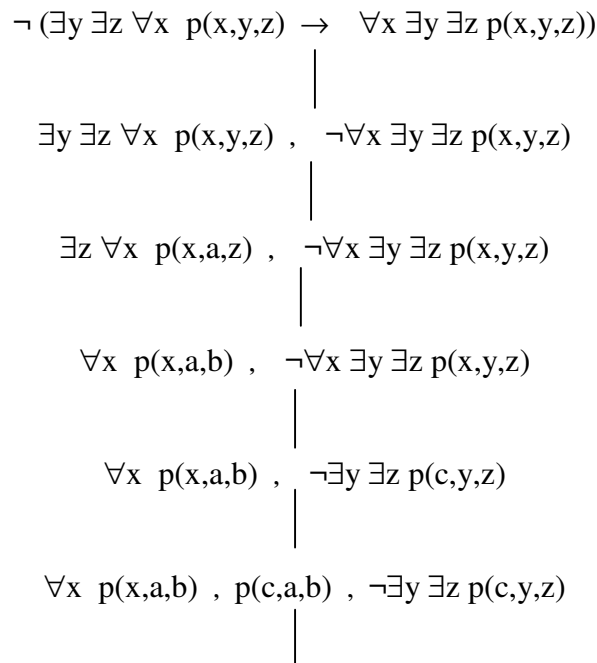
Un possibile modello è dato da  $M = (N, p)$ , dove  $N$  sono i numeri naturali (zero incluso), e  $p$  è il predicato ternario  $p(x, y, z): x \geq y + z$ . Si può immediatamente verificare che il modello soddisfa la formula: infatti,  $\forall x \exists y \exists z (x \geq y + z)$  è vera (dato un qualsiasi numero, esiste sempre una coppia di numeri che, sommati, sono inferiori ad esso), e  $\exists y \exists z \forall x (x \geq y + z)$  è vera per  $y = 0$  e  $z = 0$ .

8. Cosa si può dire della seguente?

$$\exists y \exists z \forall x p(x,y,z) \rightarrow \forall x \exists y \exists z p(x,y,z)$$

**Risposta.** La formula può essere valida, soddisfacibile, o insoddisfacibile. Se una formula è valida, è anche soddisfacibile; dunque proviamo a dimostrare che la formula è valida mediante tableaux e Gentzen.

**Tableaux**



$$\begin{array}{c}
\forall x \ p(x,a,b) , \ p(c,a,b) , \ \neg \exists y \ \exists z \ p(c,y,z) , \ \neg \exists z \ p(c,a,z) \\
| \\
\forall x \ p(x,a,b) , \ \underline{p(c,a,b)} , \ \neg \exists y \ \exists z \ p(c,y,z) , \ \neg \exists z \ p(c,a,z) , \ \underline{\neg p(c,a,b)} \\
X
\end{array}$$

**Gentzen**

$$\begin{array}{c}
\mathcal{A} \\
\dots , \ \underline{\neg p(d,b,c)} , \ \dots , \ \forall x \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) , \ \underline{p(d,b,c)} , \ p(a,b,c) \\
| \\
\dots , \ \neg p(d,b,c) , \ \dots , \ \forall x \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) , \ p(a,b,c) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) , \ \neg \exists z \ \forall x \ p(x,b,z) , \ \neg \forall x \ p(x,b,c) , \ \neg p(d,b,c) , \ \dots , \ p(a,b,c) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) , \ \neg \exists z \ \forall x \ p(x,b,z) , \ \neg \forall x \ p(x,b,c) , \ \dots , \ p(a,b,c) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) , \ \neg \exists z \ \forall x \ p(x,b,z) , \ \dots , \ p(a,b,c) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) , \ \dots , \ p(a,b,c) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) , \ \forall x \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) , \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) , \ \exists z \ p(a,b,z) , \ p(a,b,c) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) , \ \forall x \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) , \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) , \ \exists z \ p(a,b,z) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) , \ \forall x \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) , \ \exists y \ \exists z \ p(a,y,z) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) , \ \forall x \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) \\
| \\
\neg \exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) \vee \forall x \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z) \\
| \\
\exists y \ \exists z \ \forall x \ p(x,y,z) \rightarrow \forall x \ \exists y \ \exists z \ p(x,y,z)
\end{array}$$

La formula è valida. Si noti che questa formula è l'inverso della formula dell'esercizio precedente, cioè antecedente e conseguente dell'implicazione sono scambiati; tuttavia, mentre la formula dell'esercizio 7 è solo soddisfacibile, quella dell'esercizio 8 è valida.

9. È vero che dalle prime due proposizioni deriva la terza (usare la risoluzione)?
- a. Se mi alzerò tardi, perderò l'autobus
  - b. Sicuramente domattina mi alzerò tardi o non farò colazione
  - c. Allora perderò l'autobus