Metodi matematici per l'Informatica

A.A. 2012/13 - prova di esonero del 15 novembre 2012 - fila A

Esercizio 1

Indichiamo con $\emptyset$ l'insieme vuoto, e con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X. Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, \emptyset\}$. Quali delle seguenti proposizioni è vera?

a)	$A \in B$	☐
b)	$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$	☐
c)	$B \setminus A = \emptyset$	☐
d)	$\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq B$	☐
e)	$(A \times B) \cup (B \times A) = B \times B$	☐

Esercizio 2

Sia K l'insieme $\{1, 2, 3\}$; per ciascuna relazione $R_i \subseteq \mathcal{P}(K) \times \mathcal{P}(K)$ indicare quali fra le proprietà indicate è soddisfatta:

A) $R_1 = \{(X, Y) : X \cap Y \neq \emptyset\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

B) $R_2 = \{(X, Y) : X \setminus Y = \emptyset\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

C) $R_3 = \{(X, Y) : X \subseteq Y \text{ e } X \neq Y\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

D) $R_4 = \{\,\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

E) $R_5 = \mathcal{P}(K) \times \mathcal{P}(K)$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

F) $R_6 = \{(X, Y) : \#X \neq \#Y\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

Esercizio 3

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Selezionare le affermazioni corrette:

A) Se f è non iniettiva allora $g \circ f$ è non iniettiva.	☐
B) Se g è non iniettiva allora $g \circ f$ è non iniettiva.	☐
C) Se $g \circ f$ è non suriettiva allora f è non suriettiva	☐
D) Se $g \circ f$ è non suriettiva allora g è non suriettiva	☐

Esercizio 4

Usando l'induzione, si dimostri la seguente equazione:

$$\sum_{k=0,\dots n} k^3 = (\sum_{k=0,\dots n} k)^2$$

Metodi matematici per l'Informatica

A.A. 2012/13 - prova di "esonero" del 15 novembre 2012 - fila B

Esercizio 1

Indichiamo con $\emptyset$ l'insieme vuoto, e con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme dei sottoinsiemi di X. Siano $A = \{7, \emptyset\}$ e $B = \{7\}$. Quali delle seguenti proposizioni è vera?

$a)$	$A \setminus B = \emptyset$	☐
$c)$	$B \in A$	☐
$b)$	$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$	☐
$d)$	$\mathcal{P}(B \setminus A) \subseteq A$	☐
$e)$	$(A \times A) \cup (B \times B) = (A \times B) \cup (B \times A)$	☐

Esercizio 2

Sia K l'insieme $\{a, b\}$; per ciascuna relazione $R_i \subseteq \mathcal{P}(K) \times \mathcal{P}(K)$ indicare quali fra le proprietà indicate è soddisfatta:

A) $R_1 = \{(X, Y) : X \cup Y \neq X\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

B) $R_2 = \{(X, Y) : X \setminus Y = \emptyset \text{ e } X \neq Y\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

C) $R_3 = \{(X, Y) : X \subseteq Y \text{ e } y \in X \text{ per ogni } y \in Y\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

D) $R_4 = \{(a, a)\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

E) $R_5 = \mathcal{P}(K) \times \mathcal{P}(K)$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

F) $R_6 = \{(X, Y) : \#Y = \#X + 1\}$
☐ riflessiva ☐ antiriflessiva ☐ simmetrica ☐ antisimmetrica ☐ transitiva

Esercizio 3

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Selezionare le affermazioni corrette:

A) Se f è non suriettiva allora $g \circ f$ è non suriettiva. ☐
B) Se g è non suriettiva allora $g \circ f$ è non suriettiva. ☐
C) Se $g \circ f$ è non iniettiva allora f è non iniettiva ☐
D) Se $g \circ f$ è non iniettiva allora g è non iniettiva ☐

Esercizio 4

Usando l'induzione, si dimostri la seguente equazione:

$$\sum_{k=0,\ldots n} k^3 = (\sum_{k=0,\ldots n} k)^2$$

SOLUZIONI A

1. Crocetta su d

2. A) Crocette su 1 e 3
   B) Crocette su 1 e 4
   C) Crocette su 2, 4 e 5
   D) Crocette su 2, 3, 4 e 5
   E) Crocette su 1, 3 e 5
   F) Crocette su 2 e 3

3. Crocetta su A)

4. Base (n= 0). $0^3 = 0^2$
   Induzione (vero fino a n, da dimostrare per n +1): sfruttando il risultato di Gauss
   $\Sigma_{k=0,..,n+1} k^3 = \Sigma_{k=0,..,n} k^3 + (n+1)^3 = (\Sigma_{k=0,..,n} k)^2 + (n+1)^3 =$
   $(n(n+1)/2)^2 + (n+1)^3 = ((n+1)(n+2)/2)^2 = (\Sigma_{k=0,..,n+1} k)^2$

Le soluzini per la fila C si ottengono per permutazione

SOLUZIONI B

1. Crocetta su d

2. A) Crocette su 2 e 4
   B) Crocette su 2
   C) Crocette su 2, 4 e 5
   D) Crocette su 1, 3, 4 e 5
   E) Crocette su 3, 4 e 5
   F) Crocette su 1, 3 e 5

3. Crocetta su D)

4. Base (n= 0). $0^3 = 0^2$
   Induzione (vero fino a n, da dimostrare per n +1): sfruttando il risultato di Gauss
   $\Sigma_{k=0,..,n+1} k^3 = \Sigma_{k=0,..,n} k^3 + (n+1)^3 = (\Sigma_{k=0,..,n} k)^2 + (n+1)^3 =$
   $(n(n+1)/2)^2 + (n+1)^3 = ((n+1)(n+2)/2)^2 = (\Sigma_{k=0,..,n+1} k)^2$

Le soluzini per la fila D si ottengono per permutazione