Sapienza Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'informatica, canale 1
1° Prova, a.a. 20010/11

FILE A e C

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {a,b,c}, B = {a, b, c, {a},{b},{c}} e C = ***P***(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$B \cap C = A$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\{b,c\} \in C \setminus B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$B \subseteq C$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$A \cup B = B$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$\{a\} \in B \cup C$	☐ Vero	☐ Falso

2. Quali dei seguenti insiemi sono in corrispondenza biunivoca?

A.	$A \times B$ e $B \times A$	☐ Vero	☐ Falso
B.	I numeri naturali ed i reali positivi	☐ Vero	☐ Falso
C.	$A \times \emptyset$ ed A	☐ Vero	☐ Falso
D.	A e la diagonale di A	☐ Vero	☐ Falso
E.	Due qualunque insiemi vuoti	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei numeri naturali, si dica se è del tipo indicato e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia numeri la cui somma dà 0
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:________________________________

B. la relazione che accoppia numeri uno il doppio dell'altro in qualunque ordine
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:________________________________

C. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è un multiplo proprio del secondo
☐ a. è un ordine debole
☐ b. non è un ordine debole perché non gode della/e proprietà:________________________________

D. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è il successore del secondo
☐ a. è un ordine stretto
☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà________________________________

E. la relazione che accoppia tutti i numeri
☐ a. è un ordine stretto
☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà________________________________

F. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è il successore del secondo
☐ a. è un ordine debole
☐ b. non è un ordine debole perché non gode della/e proprietà:________________________________

4. Siano f e g due funzioni da A a $\wp(B)$ (cioè, l'insieme delle parti di B). Sia h la loro unione punto per punto, cioè per ogni $x \in A$, $h(x) = f(x) \cup g(x)$. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false

A.	h è una relazione totale e univoca da A a $\wp(B)$	☐ Vero	☐ Falso
B.	se f e g sono suriettive allora h è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
C.	l'immagine di h è costituita da elementi non vuoti di $\wp(B)$	☐ Vero	☐ Falso
D.	h costante implica g e f costanti	☐ Vero	☐ Falso
E.	$h \circ h$ è definita	☐ Vero	☐ Falso

5. Si dimostri per induzione che, per ogni n $\in$ **N**, vale che $\sum_{k=0\dots n} \frac{1}{2^k} \geq \frac{n+1.}{2^n}$

SOLUZIONI:

1. **Vere B,D,E**
2. **Vere A,D,E**
3. A: a, B: b perché non riflessiva e non transitiva; C: b perché non riflessiva e non antisimmetrica; D: b perché non transitiva; E: b perché non antiriflessiva; F: b perché non riflessiva e non transitiva
4. Vera A

5. Base (n = 0): $\sum_{k=0\ldots 0} \frac{1}{2^k} = 1 = \frac{0+1}{2^0}.$

   Induzione (vero per n, da dimostrare per n+1):

$$\sum_{k=0\ldots n+1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0\ldots n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$\geq \frac{n+1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$= \frac{2n+3}{2^{n+1}}$$

$$\geq \frac{n+2}{2^{n+1}}.$$

FILA B

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {a,b,c}, B = {a, b, c, {a,b,c}} e C = ***P***(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$C \cup B = C$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$b \notin C \setminus B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$B \subseteq C$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$A \cup B = A$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$\{a\} \in B \cap C$	☐ Vero	☐ Falso

2. Quali dei seguenti insiemi non sono in corrispondenza biunivoca?

A.	I numeri reali negativi ed i reali positivi	☐ Vero	☐ Falso
B.	Due qualunque insiemi non vuoti	☐ Vero	☐ Falso
C.	$(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$A \times \varnothing$ ed $A \times \{*\}$	☐ Vero	☐ Falso
E.	A e l'insieme delle parti di A	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei numeri naturali, si dica se è del tipo indicato e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia numeri con massimo comun divisore diverso da 1
- ☐ a. è un'equivalenza
- ☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:______________________________

B. la relazione che accoppia numeri la cui somma è pari
- ☐ a. è un'equivalenza
- ☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:______________________________

C. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è il triplo del secondo
- ☐ a. è un ordine stretto
- ☐ b. non è un ordine debole perché non gode della/e proprietà:______________________________

D. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è sempre uguale a 0
- ☐ a. è un ordine stretto
- ☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà______________________________

E. la diagonale di N
- ☐ a. è un ordine stretto
- ☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà______________________________

4. Siano f e g funzioni (totali) e $g \circ f$ la loro composta. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	il dominio di g deve coincidere con il dominio di f	☐ Vero	☐ Falso
B.	il codominio di g deve coincidere con il dominio di f	☐ Vero	☐ Falso
C.	$f \circ g$ non è mai definita	☐ Vero	☐ Falso
D.	se $g \circ f$ è l'identità sul dominio di f, $f \circ g$ è l'identità sul dominio di g.	☐ Vero	☐ Falso
E.	se f è suriettiva allora $g \circ f$ è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso

5. Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, vale che $\prod_{k=1\ldots n} \frac{1}{k} \leq 1$

SOLUZIONI:

1. Vera B
2. Vere B,D,E
3. A: b perché non riflessiva e non transitiva; B: a; C: b perché non transitiva e antiriflessiva; D: b perché non antiriflessiva; F: b perché non antiriflessiva
4. Tutte false

5. Base (n = 0): $\prod_{k=1\ldots 0} \frac{1}{k} = 1 \leq 1$

   Induzione (vero per n, da dimostrare per n+1):

$$\prod_{k=1\ldots n+1} \frac{1}{k} = \left(\prod_{k=1\ldots n} \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{1}{n+1}.$$

$$\leq 1 \cdot \frac{1}{n+1}.$$

$$\leq 1$$

FILA D

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {a,b,c}, B = {a, b, c, {a,b,c}} e C = ***P***(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$A \cup B = B$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$B \subseteq C$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$\{b,c\} \in C \setminus B$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$\{a\} \in B \cup C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$B \cap C = A$	☐ Vero	☐ Falso

2. Quali dei seguenti insiemi sono in corrispondenza biunivoca?

A.	$(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A \times \emptyset$ ed $A \times \{*\}$	☐ Vero	☐ Falso
C.	Due qualunque insiemi non vuoti	☐ Vero	☐ Falso
D.	A e l'insieme delle parti di A	☐ Vero	☐ Falso
E.	I numeri reali negativi ed i reali positivi	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei numeri naturali, si dica se è del tipo indicato e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia numeri la cui somma è pari
- ☐ a. è un'equivalenza
- ☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:_________________________________

B. la relazione che accoppia numeri con massimo comun divisore diverso da 1
- ☐ a. è un'equivalenza
- ☐ b. non è un'equivalenza perché non gode della/e proprietà:_________________________________

C. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è il triplo del secondo
- ☐ a. è un ordine stretto
- ☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà:________________________________

D. la diagonale di N
- ☐ a. è un ordine stretto
- ☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà________________________________

E. la relazione che accoppia numeri dei quali il primo è sempre uguale a 0
- ☐ a. è un ordine stretto
- ☐ b. non è un ordine stretto perché non gode della/e proprietà________________________________

4. Siano f e g due funzioni da A a $\wp(B)$ (cioè, l'insieme delle parti di B). Sia h la loro intersezione punto per punto, cioè per ogni $x \in A$, $h(x) = f(x) \cap g(x)$. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false

A.	h è funzione invertibile da A a $\wp(B)$	☐ Vero	☐ Falso
B.	se f e g non sono costanti allora h non è costante	☐ Vero	☐ Falso
C.	l'immagine di h è costituita da elementi non vuoti di $\wp(B)$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$h = f \,.\, g$	☐ Vero	☐ Falso
E.	la definizione di h non è corretta	☐ Vero	☐ Falso

5. Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, vale che $\prod_{k=1\ldots n} \frac{1}{k} \le 1$

SOLUZIONI:

1. Vere A,C,D
2. Vere A,E
3. A:a; B: b perché non riflessiva e non transitiva; C: b perché non transitiva; D: b perché non antiriflessiva; F: b perché non antiriflessiva
4. Tutte false
5. Come fila B