

# Esercizi sul principio di induzione

Francesco Daddi - novembre 2010

**Esercizio 1.** Dimostrare che  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall$  intero  $n \geq 1$ .

**Esercizio 2.** Dimostrare che  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall$  intero  $n \geq 1$ .

**Esercizio 3.** Dimostrare che  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall$  intero  $n \geq 1$ .

**Esercizio 4.** Dimostrare che  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \forall$  intero  $n \geq 1$ .

**Esercizio 5.** Dimostrare che  $1 - x^n = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})$  con  $x \in \mathbb{R} \quad \forall$  intero  $n \geq 2$ .

**Esercizio 6.** Dimostrare che  $n^3 - n + 6$  è divisibile per 3  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Esercizio 7.** Dimostrare che  $4^{2n+1} + 3^{n+2}$  è divisibile per 13  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Esercizio 8.** Dimostrare che, se  $x > -1$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Esercizio 9.** Dimostrare che  $n! > 2^n \quad \forall$  intero  $n \geq 4$ .

**Esercizio 10.** Dimostrare che

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad \forall \text{ intero } n \geq 2.$$

**Esercizio 11.** Dimostrare che

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall \text{ intero } n \geq 1.$$

**Esercizio 12.** Dimostrare che, se  $k \neq 1$ ,  $(1+k) \cdot (1+k^2) \cdot (1+k^3) \cdot \dots \cdot (1+k^{2^n}) = \frac{1-k^{2^{n+1}}}{1-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Esercizio 13.** Dimostrare che

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + n \cdot 5^n = \frac{5 + (4n-1)5^{n+1}}{16} \quad \forall \text{ intero } n \geq 1.$$

**Esercizio 14.** Dimostrare che

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \quad \forall \text{ intero } n \geq 1.$$

**Esercizio 15.** Dimostrare che

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1+n}{2n} \quad \forall \text{ intero } n \geq 2.$$

**Esercizio 16.** Dimostrare che

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall \text{ intero } n \geq 1.$$

**Esercizio 17.** Dimostrare che  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \forall$  intero  $n \geq 1$ .

**Esercizio 18.** Dimostrare che

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \forall \text{ intero } n \geq 1.$$

**Esercizio 19.** Dimostrare che  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall$  intero  $n \geq 1$ .