

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 4, 5 e 6; tempo 1 ora)
 scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L - FILA A
30 - 6 - 2011**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2$. Per ognuna delle seguenti 3 proprietà, si dica se f la soddisfa; se invece non la soddisfa, dare un controesempio alla proprietà in esame.
- A. f è iniettiva
 B. f non è iniettiva perché, ad esempio, _____

- C. f è suriettiva
 D. f non è suriettiva perché, ad esempio, _____

- E. f è biiettiva
 F. f non è biiettiva perché, ad esempio, _____

2. Sia A un insieme contenente un solo elemento. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
- A. Ogni relazione binaria definita su A è riflessiva
 B. Ogni relazione binaria definita su A è un'equivalenza
 C. Esiste una relazione binaria definita su A che è sia simmetrica che antisimmetrica
 D. Comunque presa una relazione binaria su A questa o è riflessiva o è irreflessiva
 E. Ogni relazione binaria definita su A è transitiva
3. Sia L il linguaggio sull'alfabeto $\{a,b\}$ induttivamente definito da
- $\varepsilon \in L$
 - se $w \in L$ allora $awb \in L$
- Si dimostri per induzione sulla lunghezza di w che, se $w \in L$, allora la lunghezza di w è un numero pari.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la formula $A \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$ è un teorema.
5. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula $\exists x P(x) \rightarrow (P(c) \vee P(d))$ è soddisfacibile.
6. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per la formula dell'esercizio precedente?
- A. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = \text{"x è negativo"}$, $c = \text{"5"}$, $d = \text{"0"}$
 - B. il dominio è \mathbf{Q} , $P(x) = \text{"x è intero"}$, $c = \text{"5"}$, $d = \text{"1/2"}$
 - C. il dominio è \mathbf{R} , $P(x) = \text{"x = 0"}$, $c = \text{"5"}$, $d = \text{"4"}$
 - D. il dominio è \mathbf{N} , $P(x) = \text{"x è intero"}$, $c = \text{"1"}$, $d = \text{"3"}$

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 4, 5 e 6; tempo 1 ora)
- scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L - FILA B
30 - 6 - 2011**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Per ognuna delle seguenti 3 proprietà, si dica se f la soddisfa; se invece non la soddisfa, dare un controesempio alla proprietà in esame.

- A. f è iniettiva
- B. f non è iniettiva perché, ad esempio, _____

- C. f è suriettiva
- D. f non è suriettiva perché, ad esempio, _____

- E. f è biiettiva
- F. f non è biiettiva perché, ad esempio, _____

2. Sia A un insieme vuoto. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- A. Ogni relazione binaria definita su A è riflessiva
- B. Ogni relazione binaria definita su A è un'equivalenza
- C. Esiste una relazione binaria definita su A che è sia simmetrica che antisimmetrica
- D. Comunque presa una relazione binaria su A questa o è riflessiva o è irreflessiva
- E. Ogni relazione binaria definita su A è transitiva

3. Sia L il linguaggio sull'alfabeto $\{a,b\}$ induttivamente definito da

- $\varepsilon \in L$
- se $w \in L$ allora $awb \in L$

Si dimostri per induzione su w che, se $w \in L$, allora la lunghezza di w è un numero pari.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la formula $A \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$ è un teorema.
5. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula $\exists x P(x) \rightarrow (P(c) \wedge P(d))$ è soddisfacibile.
6. Quale delle seguenti interpretazioni NON è un modello per la formula dell'esercizio precedente?
- A. il dominio è \mathbf{N} , $P(x)$ = "x è negativo", c = "5", d = "0"
 - B. il dominio è \mathbf{R} , $P(x)$ = "x è intero", c = "5", d = "1/2"
 - C. il dominio è \mathbf{N} , $P(x)$ = "x = 0", c = "5", d = "0"
 - D. il dominio è \mathbf{Q} , $P(x)$ = "x è intero", c = "5", d = "1/2"

SOLUZIONI

1. Fila A: Crocette su B, C, F. Non è iniettiva perché, ad esempio, $1 \neq -1$ ma $1^2 = 1 = (-1)^2$; non è biiettiva perché non è iniettiva
 Fila B: Crocette su A, D, F. Non è suriettiva perché, ad esempio, -1 non è immagine di nessun elemento del dominio; non è biiettiva perché non è suriettiva

2. Fila A: Crocette su C, D, E
 Fila B: Crocetta su A, B, C, D, E

3. **Base** ($w = \varepsilon$): Per definizione, ε non contiene nessun carattere, quindi è lunga 0 che è un numero pari.

Induzione (vero per una generica $w \in L$, da dimostrare per awb):

Per induzione, w ha lunghezza pari, diciamo k . Banalmente, awb ha lunghezza $k+2$ che è pari, essendo k pari.

La dimostrazione poteva anche essere fatta per induzione sulla lunghezza di w :

Base ($|w| = 0$): banalmente vera, essendo 0 pari.

Induzione (vero fino a $|w| = n$, da dimostrare per w di lunghezza $n+1$):

se w è lunga $n+1$, deve essere della forma $aw'b$, per $w' \in L$ e di lunghezza $n-1$; per induzione, $n-1$ è pari; quindi $|w| = (n-1)+2 = n+1$ è pari, essendo $n-1$ pari.

- 4.

$A, \neg A, \neg A$	—	A	Ass.
$A, \neg A$	—	$\neg A \rightarrow A$	TD
A	—	$\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$	TD
	—	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$	TD
oppure:			
$\neg A$	—	$(A \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$	Ax. 1
	—	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$	TD
	—	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$	scambio premesse

5. Si costruisca il tableau per la formula data e si noti che resta aperto.

6. Fila A: Crocette su A, B, D
 Fila B: Crocette su B, C, D