

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L
26 - 1 - 2012 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)

scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Sia $X \subseteq \mathbf{N}$ e $\text{pari}(X) = \{x \in X : x \text{ è pari}\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?
 - A. $X \setminus \text{pari}(X)$ non può mai essere uguale a X
 - B. $X \cup \text{pari}(X) = X$, qualunque sia X
 - C. $X \cap \text{pari}(X) = X$, qualunque sia X
 - D. $X \cap \text{pari}(X) = \text{pari}(X)$, qualunque sia X

2. Sia $R = \{(X, Y) : X, Y \subseteq \mathbf{N} \text{ e } \exists A \subset X \exists B \subset Y \text{ t.c. } A \text{ e } B \text{ sono equipotenti}\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?
 - A. R è una relazione d'ordine
 - B. R è una relazione d'equivalenza
 - C. $(\mathbf{Z}, \mathbf{N}) \in R$
 - D. $(\emptyset, \emptyset) \in R$

3. Qual è il più grande sottoinsieme di \mathbf{N} per cui vale $3^n > 2^n + 1$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo su n .

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

5. Si dimostri che la seguente formula è non falsificabile usando il metodo dei tableau
 $(\forall x \forall y P(x,y) \vee \forall y \forall x Q(y,x)) \rightarrow (P(a,a) \vee Q(a,a))$

6. Trovare un modello per la formula di cui al punto 5

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L
26 - 1 - 2012 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)

scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Sia $X \subseteq \mathbf{N}$ e $\text{pari}(X) = \{x \in X : x \text{ è pari}\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?
 - A. $X \setminus \text{pari}(X) = X$ se e solo se $X = \emptyset$
 - B. $X \cup \text{pari}(X) = X$ se e solo se X contiene numeri dispari
 - C. $X \cap \text{pari}(X) = X$ se e solo se X contiene solo numeri pari
 - D. $X \cap \text{pari}(X) = \text{pari}(X)$ se e solo se $X \neq \emptyset$

2. Sia $R = \{(X,Y) : X, Y \subseteq \mathbf{N} \text{ e } \exists A \subset X \text{ t.c. } A \text{ e } Y \text{ sono equipotenti}\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?
 - A. R è una relazione d'ordine
 - B. R è una relazione d'equivalenza
 - C. $(\mathbf{Z}, \mathbf{N}) \in R$
 - D. $(\emptyset, \emptyset) \in R$

3. Qual è il più grande sottoinsieme di \mathbf{N} per cui vale $3^{n+1} > 2^n + 2$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo su n .

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B)$$

5. Si dimostri che la seguente formula è soddisfacibile usando il metodo dei tableau
 $(P(a,a) \vee Q(a,a)) \rightarrow (\forall x \forall y P(x,y) \vee \forall y \forall x Q(y,x))$

6. Trovare un modello per la formula di cui al punto 5

Cognome _____ Nome _____

C

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L
26 - 1 - 2012 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)

scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Sia $X \subseteq \mathbf{N}$ e $\text{pari}(X) = \{x \in X : x \text{ è pari}\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?
 - A. $X \setminus \text{pari}(X) = X$ solo se $X = \emptyset$
 - B. se $X = \emptyset$ allora $X \cup \text{pari}(X) = X$
 - C. $X \cap \text{pari}(X) = X$ solo se $X = \emptyset$
 - D. $X \cap \text{pari}(X) = \text{pari}(X)$ solo se $X = \emptyset$

2. Sia $R = \{(X, Y) : X, Y \subseteq \mathbf{N} \text{ e } \exists A \subset X \exists B \supset Y \text{ t.c. } A \text{ e } B \text{ sono equipotenti}\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?
 - A. R è una relazione d'ordine
 - B. R è una relazione d'equivalenza
 - C. $(\mathbf{Z}, \mathbf{N}) \in R$
 - D. $(\emptyset, \emptyset) \in R$

3. Qual è il più grande sottoinsieme di \mathbf{N} per cui vale $3^n > 2^{n+1} + 1$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo su n .

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

5. Si dimostri che la seguente formula è falsificabile usando il metodo dei tableau
 $(\forall x \exists y P(x,y) \vee \forall y \exists x Q(y,x)) \rightarrow (P(a,a) \vee Q(a,a))$

6. Trovare un contromodello per la formula di cui al punto 5

Cognome _____ Nome _____

D

**Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A - L
26 - 1 - 2012 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)

scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Sia $X \subseteq \mathbf{N}$ e $\text{pari}(X) = \{x \in X : x \text{ è pari}\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?
 - A. $X \setminus \text{pari}(X) = X$ se e solo se $X \neq \emptyset$
 - B. $X \cup \text{pari}(X) = X$ se e solo se X non contiene numeri dispari
 - C. $X \cap \text{pari}(X) = X$ se e solo se X contiene numeri pari
 - D. $X \cap \text{pari}(X) = \text{pari}(X)$ se e solo se $X = \mathbf{N}$

2. Sia $R = \{(X, Y) : X, Y \subseteq \mathbf{N} \text{ e } \exists A \supset X \text{ t.c. } A \text{ e } Y \text{ sono equipotenti}\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?
 - A. R è una relazione d'ordine
 - B. R è una relazione d'equivalenza
 - C. $(\mathbf{Z}, \mathbf{N}) \in R$
 - D. $(\emptyset, \emptyset) \in R$

3. Qual è il più grande sottoinsieme di \mathbf{N} per cui vale $3^{n-1} > 2^{n+1} + 1$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo su n .

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B)$$

5. Si dimostri che la seguente formula è falsificabile usando il metodo dei tableau
 $(P(a,a) \vee Q(a,a)) \rightarrow (\forall x \forall y P(x,y) \vee \forall y \forall x Q(y,x))$

6. Trovare un contromodello per la formula di cui al punto 5

SOLUZIONI

1.

Fila A: Crocette su B e D

Fila B: Crocetta su C

Fila C: Crocetta su B

Fila D: Nessuna Crocetta

2. In tutte le file nessuna risposta è esatta

3.

Fila A:

Il più grande sottoinsieme è $\{2,3,4,\dots\}$. Per $n = 2$, basta fare i calcoli; per $n > 2$ si procede nel modo seguente:

- Si assume la tesi vera per $n-1$
- $3^n = 3 \cdot 3^{n-1} > 3(2^{n-1} + 1) = 3 \cdot 2^{n-1} + 3 > 2 \cdot 2^{n-1} + 1 = 2^n + 1$

Fila B:

Il più grande sottoinsieme è $\{1,2,3,\dots\}$. Per $n = 1$, basta fare i calcoli; per $n > 1$ si procede nel modo seguente:

- Si assume la tesi vera per $n-1$
- $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(2^{n-1} + 2) = 3 \cdot 2^{n-1} + 6 > 2 \cdot 2^{n-1} + 2 = 2^n + 2$

Fila C:

Il più grande sottoinsieme è $\{3,4,\dots\}$. Per $n = 3$, basta fare i calcoli; per $n > 3$ si procede nel modo seguente:

- Si assume la tesi vera per $n-1$
- $3^n = 3 \cdot 3^{n-1} > 3(2^n + 1) = 3 \cdot 2^n + 3 > 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1$

Fila D:

Il più grande sottoinsieme è $\{4,5,6,\dots\}$. Per $n = 4$, basta fare i calcoli; per $n > 4$ si procede nel modo seguente:

- Si assume la tesi vera per $n-1$
- $3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-2} > 3(2^n + 1) = 3 \cdot 2^n + 3 > 2 \cdot 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1$

4.

File A e C:

$\{A \rightarrow B, (B \rightarrow (A \rightarrow C)), A\} \vdash A$	Ass.
$\{A \rightarrow B, (B \rightarrow (A \rightarrow C)), A\} \vdash A \rightarrow B$	Ass.
$\{A \rightarrow B, (B \rightarrow (A \rightarrow C)), A\} \vdash B$	MP
$\{A \rightarrow B, (B \rightarrow (A \rightarrow C)), A\} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$	Ass.
$\{A \rightarrow B, (B \rightarrow (A \rightarrow C)), A\} \vdash A \rightarrow C$	MP
$\{A \rightarrow B, (B \rightarrow (A \rightarrow C)), A\} \vdash C$	MP
$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$	TD (3 v.)

File B e D:

$\{A, (\neg B \rightarrow \neg A)\} \vdash A$	Ass.
$\{A, (\neg B \rightarrow \neg A)\} \vdash (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ass.
$\{A, (\neg B \rightarrow \neg A)\} \vdash A \rightarrow B$	Contr.
$\{A, (\neg B \rightarrow \neg A)\} \vdash B$	MP
$\vdash A \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow B)$	TD (2 v.)

5. Suggerimento: usare come teoremi le formule della Proposizione 9.1.

Fila A:

La si neghi e si provi che il tableau è chiuso

Fila B:

Si mostri che il tableau della formula è aperto

Fila C:

La si neghi e si provi che il tableau è aperto

Fila D:

La si neghi e si provi che il tableau è aperto

6.

Fila A: Ogni interpretazione è un modello

Fila B: Basta prendere un'interpretazione nella quale né (a,a) non soddisfi né $|P|$ né $|Q|$

Fila C: Basta avere un dominio con almeno due elementi e che le interpretazioni di P e Q , pur soddisfacendo la premessa, non contengano la diagonale.

Fila D: Basta avere un dominio con almeno due elementi e che le interpretazioni di P e Q , non siano totali, pur contenendo la diagonale.