

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3, 4 e 5)
- scritto completo (svolgere tutti gli esercizi)

**Esame dell'insegnamento di  
METODI MATEMATICI - Canale A – D - FILA A  
21 - I - 2010 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia  $f: A \rightarrow A$  una funzione. Quali delle seguenti risposte è esatta?:
  - A. Se  $\text{Im}(f) = A$ , allora  $f$  è suriettiva.
  - B. Se  $\text{Im}(f) = A$ , allora  $f$  è iniettiva.
  - C. Le risposte precedenti non cambierebbero sotto l'ulteriore ipotesi che  $A$  è finito.
  - D.  $\text{Im}(f) \setminus A = \emptyset$
  - E.  $\text{Im}(f) \subseteq \text{dom}(f)$
  - F. Si assuma che  $f$ , vista come relazione binaria su  $A$ , sia simmetrica; allora la relazione  $f^{-1}$  deve essere simmetrica.
  - G. Si definisca  $a \approx a'$  se e solo se  $a' = f(a)$ . Allora  $\approx$  è riflessiva se e solo se  $f$  è l'identità.
  
2. Si dimostri per induzione su  $n$  che  $\sum_{k=1..n} \sqrt{k} \leq n^2$ .

+++++

3. Provare con il metodo di Hilbert che la formula  $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$  è una tautologia.

4. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula  $\forall x \exists y (P(y,x) \rightarrow Q(x,y))$  è soddisfacibile.

5. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per la formula dell'esercizio precedente?

- A. il dominio è  $\mathbf{N}$ ,  $P(y,x) = "y > x"$ ,  $Q(x,y) = "x \neq y"$
- B. il dominio è  $\mathbf{N}_{\text{pari}}$ ,  $P(y,x) = "y = x+1"$ ,  $Q(x,y) = "x = y"$
- C. il dominio è  $\mathbf{N}$ ,  $P(y,x) = "y \text{ è il successore di } x"$ ,  $Q(x,y) = "x = y"$
- D. il dominio è  $\mathbf{N}$ ,  $P(y,x) = "y \geq x"$ ,  $Q(x,y) = "x \text{ è multiplo proprio di } y"$

- secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3, 4 e 5)
- scritto completo (svolgere tutti gli esercizi)

**Esame dell'insegnamento di  
METODI MATEMATICI - Canale A – D - FILA B  
21 - I - 2010 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia  $f: A \rightarrow B$  una funzione. Quali delle seguenti risposte è esatta?:
  - A. Se  $\text{Im}(f) = B$ , allora  $f$  è iniettiva.
  - B. La risposta A non cambierebbe sotto l'ulteriore ipotesi che  $B$  è finito.
  - C. La risposta A non cambierebbe sotto l'ulteriore ipotesi che  $A$  e  $B$  hanno stessa cardinalità.
  - D. se  $B \subseteq A$  allora  $\text{Im}(f) \setminus A = \emptyset$
  - E. se  $A \subseteq B$  allora  $\text{Im}(f) \subseteq \text{dom}(f)$
  - F.  $f$ , vista come relazione su  $A \times B$ , non può essere simmetrica.
  - G. Si definisca  $a \approx b$  se e solo se  $b = f(a)$ . Allora  $\approx$  può essere riflessiva.
  
2. Si dimostri per induzione su  $n$  che  $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n^2$ .

+++++

3. Provare con il metodo di Hilbert che la formula  $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$  è una tautologia.

4. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula  $\exists x \forall y (P(y,x) \rightarrow Q(x,y))$  è soddisfacibile.

5. Quale delle seguenti interpretazioni NON è un modello per la formula dell'esercizio precedente?

- A. il dominio è  $\mathbf{N}$ ,  $P(y,x) = "y > x"$ ,  $Q(x,y) = "x \neq y"$
- B. il dominio è  $\mathbf{N}_{pari}$ ,  $P(y,x) = "y = x+1"$ ,  $Q(x,y) = "x = y"$
- C. il dominio è  $\mathbf{N}$ ,  $P(y,x) = "y \text{ è il successore di } x"$ ,  $Q(x,y) = "x = y"$
- D. il dominio è  $\mathbf{N}$ ,  $P(y,x) = "y \geq x"$ ,  $Q(x,y) = "x \text{ è multiplo proprio di } y"$

## SOLUZIONI

1. Fila A: Crocette su A, D, E, F, G  
Fila B: Crocette su B, C, D, G

2.

**Base** ( $n = 0$ ): banalmente,  $0 \leq 0$ .

**Induzione:**  $\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} + \sqrt{(n+1)} \leq n^2 + \sqrt{(n+1)}$   
 $\leq n^2 + n + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Si noti che  $\sqrt{m} \leq m$ , per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$ . Questo è dimostrabile con una banale induzione o, più semplicemente, osservando che  $\sqrt{m} \geq 1$  e quindi  $\sqrt{m} \leq \sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m$ .

3.

$\vdash$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ax.3
$\vdash$	$\neg B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$	Scambio premesse
$\vdash$	$\neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow B$	Contrapposizione
$\vdash$	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$	Definizione di $\wedge$

4. Si costruisca il tableau per la formula data e si noti che resta aperto.

5. Fila A: Crocette su A, B, C, D  
Fila B: Crocette su C, D