Cognome ______________________________ **Nome**___________________

- ☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 4, 5 e 6; tempo 1 ora)**
- ☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L - FILA A
20 - 7 - 2011
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Siano R, S $\subseteq$ A×A, dove A è un insieme non vuoto, e sia T = R $\cap$ S. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- ☐ A. Se R e S sono riflessive, allora T è riflessiva
- ☐ B. Se R e S sono irriflessive, allora T è irriflessiva
- ☐ C. Se R e S sono simmetriche, allora T è simmetrica
- ☐ D. Se R e S sono antisimmetriche, allora T è antisimmetrica
- ☐ E. Se R e S sono transitive, allora T è transitiva

Quali delle affermazioni precedenti restano vere assumendo come ipotesi che la proprietà in esame sia soddisfatta solo da R (e non da S)?_______________________________________

2. Un albero binario completo è un albero in cui ogni nodo interno ha 2 figli e le foglie sono tutte alla stessa distanza dalla radice. Si dimostri che un albero binario completo ha $2^{k+1} - 1$ nodi, dove k è l'altezza dell'albero (cioè la massima distanza da una foglia alla radice).

(N.B.: in ogni albero completo, la radice o non ha figli o ha due figli anch'essi completi)

3. Provare con il metodo di Hilbert che la formula $((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$ è un teorema.

4. Si provi con il metodo dei tableau semantici che la formula $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$ è soddisfacibile.

5. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per la formula dell'esercizio precedente?

- ☐ A. il dominio è **N**, P(x) = "x è negativo", Q(x) = "x è pari"
- ☐ B il dominio è **Q**, P(x) = "x è intero", Q(x) = "x è pari"
- ☐ C il dominio è **R**, P(x) = "x = 0", Q(x) = "x è irrazionale"
- ☐ D il dominio è **N**, P(x) = "x è intero", Q(x) = "x = -1"

SOLUZIONI

1. Crocette su A, B, C, D, E.
   Assumendo la proprietà vera solo per R, restano vere solo la B e la D

2. **Base** (k = 0): l'albero ha solo un nodo (la radice) e quindi

$$2^{k+1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

   Induzione (vero per ogni albero completo di altezza k, da dimostrare per un albero completo di altezza k+1): Consideriamo un albero completo T di altezza k+1. Pertanto, la radice di T ha due figli, T_1 e T_2, anch'essi completi e di altezza k. Allora

$$\text{nodi}(T) = 1 + \text{nodi}(T_1) + \text{nodi}(T_2) = 1 + 2(2^{k+1} - 1) = 1 + 2^{k+2} - 2 = 2^{k+2} - 1$$

3.

$\neg A$	$\vdash$	$\neg B \to (A \to \neg B)$	Ax. 1
$\neg A$	$\vdash$	$\neg (A \to \neg B) \to B$	Contr.
	$\vdash$	$\neg A \to (\neg (A \to \neg B) \to B)$	TD
	$\vdash$	$\neg (A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$	scambio premesse
	$\vdash$	$(A \wedge B) \to (A \vee B)$	definizione di $\wedge$ e $\vee$

4. Si costruisca il tableau per la formula data e si noti che resta aperto.

5. Crocette su A, B, C