Cognome ______________________________ **Nome**__________________________________**Fila** **A**

Prova scritta di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
30 - 01 - 2017 (prof.ssa Anna Labella)

1. Cosa possiamo dire della cardinalità degli insiemi A e B sapendo che l'insieme delle funzioni f : A → B è numerabile?

- Niente ☐
- A e B sono necessariamente entrambi numerabili ☐
- A è necessariamente numerabile ☐
- B è necessariamente numerabile ☑
- Uno dei due insiemi è necessariamente finito ☑

2. Sia (A, ∧, ∨, ¬, 0, 1) un'algebra di Boole. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- A può avere un numero qualunque di elementi ☐
- A non può avere 3 elementi ☑
- A non può avere 1024 elementi ☐
- Ogni algebra di Boole ha un elemento massimo (1) e uno minimo (0), perciò A ha necessariamente cardinalità finita ☐
- Esiste una sola algebra di Boole con A = {7, 3} ☐

3. Dimostrare per induzione che la somma dei primi *n* numeri pari non nulli è uguale a *n(n+1)*

Trascritto in formule, abbiamo $\sum_{1\leq k\leq n} 2k = n\,(n+1)$

Passo base: $n=1$, $2= 1(1+1)$

Passo induttivo: *se* $\sum_{1\leq k\leq n} 2k = n\,(n+1)$ allora $\sum_{1\leq k\leq n+1} 2k = (n+1)\,(n+2)$

$\sum_{1\leq k\leq n+1} 2k = \sum_{1\leq k\leq n} 2k + 2\,(n+1) = n\,(n+1) + 2\,(n+1) = (n+1)\,(n+2)$

4. Dimostrare nel sistema di Hilbert

$$\neg (A \vee B) \rightarrow \neg A$$

$\vdash A\rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ Ax 1
$\vdash A\rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ Contr
$\vdash \neg (\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$ Contr.
$\vdash \neg (A \vee B) \rightarrow \neg A$ def. ∨

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è falsificabile

$$\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$$

Il tableau della negata resta aperto

6. Trovare un contromodello della formula nell'esercizio **5.**

$D=\{a\}$ $|P| =\{a\}$ $|Q| = \emptyset$

Cognome ______________________________ **Nome**______________________________**Fila** **B**

Prova scritta di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
30 - 01 - 2017 (prof.ssa Anna Labella)

1. Cosa possiamo dire della cardinalità degli insiemi A e B sapendo che l'insieme delle funzioni $f : A \to B$ è numerabile?

- A e B possono avere cardinalità qualunque ☐
- B è necessariamente finito ☐
- B non può essere finito ☑
- A è necessariamente finito ☑
- A e B possono essere entrambi numerabili ☐

2. Consideriamo le algebre di Boole $(A, \wedge, \vee, \neg, \perp, T)$ definite sull'insieme $A = \{1, 2, 3\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Non può esistere una tale algebra ☑
- Ne esiste una sola ☐
- Ne esistono 2^3 ☐
- Ne esistono 3^2 ☐
- Nessuna delle precedenti ☐

3. Dimostrare per induzione che $\sum_{1 \le k \le n} (3k - 1) = \frac{1}{2} n (3n+1)$

Passo base: $n=1, \quad 2 = \frac{1}{2} 4$

Passo induttivo: *se* $\sum_{1 \le k \le n} (3k - 1) = \frac{1}{2} n (3n+1)$ allora $\sum_{1 \le k \le n+1} (3k - 1) = \frac{1}{2} (n+1) (3(n+1)+1)$

$\sum_{1 \le k \le n+1} (3k - 1) = \sum_{1 \le k \le n} (3k - 1) + 3(n+1) - 1 = \frac{1}{2} n (3n+1) + 3(n+1) - 1 = \frac{1}{2} n (3n+1) + 3n + 2$
$= \frac{1}{2} 3n^2 + \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} 6n + \frac{1}{2} 4 = \frac{1}{2}(3n^2 + 7n + 4) = \frac{1}{2}(n+1)(3n+4) = \frac{1}{2}(n+1)(3(n+1)+1)$

4. Dimostrare nel sistema di Hilbert

$$\neg A \to \neg (A \wedge B)$$

$\vdash \neg A \to (B \to \neg A)$ Ax 1
$\vdash \neg A \to (A \to \neg B)$ Contr
$\vdash \neg (A \to \neg B) \to A$ Contr.
$\vdash \neg A \to \neg (A \wedge B)$ def. $\wedge$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\forall x\, P(x) \to \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

Il tableau della formula resta aperto.

6. Trovare un modello della formula nell'esercizio **5.**

D qualunque e $|P| = \emptyset$

Cognome ______________________________ **Nome**_________________________________**Fila** **C**

Prova scritta di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
30 - 01 - 2017 (prof.ssa Anna Labella)

1. Cosa possiamo dire della cardinalità degli insiemi A e B sapendo che l'insieme delle funzioni f : A → B è numerabile?

- Uno dei due insiemi è necessariamente finito ☑
- B è necessariamente numerabile ☑
- A è necessariamente numerabile ☐
- A e B sono necessariamente entrambi numerabili ☐
- Niente ☐

2. Sia (A, ∧, ∨, ¬, 0, 1) un'algebra di Boole. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Esiste una sola algebra di Boole con A = {7, 3} ☐
- Ogni algebra di Boole ha un elemento massimo (1) e uno minimo (0), perciò A ha necessariamente cardinalità finita ☐
- A non può avere 3 elementi ☑
- A non può avere 1024 elementi ☐
- A può avere un numero qualunque di elementi ☐

3. Dimostrare per induzione che la somma dei primi *n* numeri pari non nulli è uguale a *n(n+1)*

Trascritto in formule, abbiamo $\sum_{1\le k\le n} 2k = n\,(n+1)$
Passo base: $n=1$, $2= 1(1+1)$
Passo induttivo: *se* $\sum_{1\le k\le n} 2k = n\,(n+1)$ allora $\sum_{1\le k\le n+1} 2k = (n+1)\,(n+2)$
$\sum_{1\le k\le n+1} 2k = \sum_{1\le k\le n} 2k + 2\,(n+1) = n\,(n+1) + 2\,(n+1) = (n+1)\,(n+2)$

4. Dimostrare nel sistema di Hilbert

$$\neg (A \vee B) \rightarrow \neg A$$

|- A→ (¬B → A) Ax 1
|- A→ (¬A → B) Contr
|- ¬ (¬A → B) → ¬A Contr.
|- ¬ (A ∨ B) → ¬A def. ∨

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è falsificabile

$$\forall x\, P(x) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

Il tableau della negata è aperto.

6. Trovare un contromodello della formula nell'esercizio **5.**
D={a} |P| ={a} |Q| = Ø

Cognome ______________________________ **Nome**_____________________________**Fila** **D**

Prova scritta di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
30 - 01 - 2017 (prof.ssa Anna Labella)

1. Cosa possiamo dire della cardinalità degli insiemi A e B sapendo che l'insieme delle funzioni f : A → B è numerabile?

- B non può essere finito ☑
- B è necessariamente finito ☐
- A e B possono avere cardinalità qualunque ☐
- A e B possono essere entrambi numerabili ☐
- A è necessariamente finito ☑

2. Consideriamo le algebre di Boole (A, ∧, ∨, ¬, 0, 1) definite sull'insieme A = {1, 2, 3}. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Non può esistere una tale algebra ☑
- Ne esistono 3^2 ☐
- Ne esistono 2^3 ☐
- Nessuna delle precedenti ☐
- Ne esiste una sola ☐

3. Dimostrare per induzione che $\sum_{1\le k\le n} (3k -1) = ½\ n\ (3n+1)$

Passo base: *n=1, 2= ½ 4*

Passo induttivo: *se* $\sum_{1\le k\le n} (3k -1) = ½\ n\ (3n+1)$ allora $\sum_{1\le k\le n+1} (3k -1) = ½\ (n+1)\ (3(n+1)+1)$

$\sum_{1\le k\le n+1} (3k -1) = \sum_{1\le k\le n} (3k -1) + 3\ (n+1) -1 = ½\ n\ (3n+1) + 3\ (n+1) -1 = ½\ n\ (3n+1) + 3n+ 2$
$=½\ 3n^2 +½n +½6n+½\ 4=½(3n^2 +7n+ 4)= ½\ (n+1)\ (3n+4) = ½\ (n+1)\ (3(n+1)+1)$

4. Dimostrare nel sistema di Hilbert

$$\neg A \rightarrow \neg (A \wedge B)$$

|- ¬A→ (B → ¬A) Ax 1
|- ¬A→ (A → ¬B) Contr
|- ¬ (A → ¬B) → A Contr.
|- ¬A → ¬ (A ∧ B) def. ∧

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q\ (x))$$

Il tableau della formula resta aperto.

6. Trovare un modello della formula nell'esercizio **5.**

D qualunque e |P| = Ø