Esame dell'insegnamento di

METODI MATEMATICI - Canale A – L **A-C**

15- 01 - 2018 (proff. Labella, Cenciarelli)

1. Indichiamo con $\mathcal{P}$(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Una funzione suriettiva da A in B è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A \times B)$ ☐
- Una funzione iniettiva da A in B è un sottoinsieme di $A \times B$ ☑
- L'insieme di tutte le funzioni da A in B è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A \times B)$ ☑
- L'insieme di tutte le funzioni da A in B è un elemento di $\mathcal{P}(A \times B)$ ☐
- L'insieme di tutte le funzioni da A in B è un elemento di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))$ ☐

2. Siano f: A → B e g: B → A due funzioni. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Se $g \cdot f$ è biiettiva allora f è biiettiva ☐
  Se $g \cdot f$ è biiettiva allora g è biiettiva ☐
- Se $g \cdot f$ è biiettiva allora $f \cdot g$ è biiettiva ☐
- Se $f \cdot g \cdot f$ è biiettiva allora f è biiettiva ☑
- Se $f \cdot g \cdot f$ è biiettiva allora g è biiettiva ☐

3. Verificare per induzione che per ogni naturale $n \geq 2$

$$\prod_{k=2,n} (1- 1/k^2) = (1+n)/2n$$

(la formula sbagliata presente nel compito era $\sum_{k=1,n} (1- 1/n^2) = (1+n)/2n$; chiedo scusa)

Caso base n=2 $1- 1/2^2 = 3/4 = (1+2)/2{\cdot}2$

Passo induttivo: supponiamo l'uguaglianza vera per n, dimostriamola per n+1

$$\prod_{k=2,n+1} (1- 1/k^2) = (2+n)/2(n+1)$$

$\prod_{k=2,n+1}(1- 1/k^2) = (1- 1/(n+1)^2) \prod_{k=2,n} (1- 1/k^2) = (1- 1/(n+1)^2) (1+n)/2n =$
$=(1+n)/2n - (1+n)/2n (n+1)^2$

cioè, calcolando il minimo comune multiplo 2n (n+1)2 tra i due termini ed eliminandolo, dobbiamo provare

$(n+1)^3 - (n+1) = (2+n)\, n\, (n+1)$, ma entrambi sono uguali a $n^3 + 3n^2 + 2n$

3t. (teledidattica) Quali fra le seguenti affermazioni sono vere per qualunque formula P e Q della logica predicativa?

- Se P → Q è soddisfacibile allora ogni modello di P è anche un modello di Q ☐
- Se P → Q è valida allora ogni modello di P è anche un modello di Q ☑
- Se P → Q è insoddisfacibile allora Q è insoddisfacibile ☑
- Se P → Q è insoddisfacibile allora P è valida ☑
- Se P → Q è soddisfacibile allora P e Q sono soddisfacibili ☐

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \to B) \to (A \to ((A \to (B \to C)) \to C))$$

Si ottiene usando due volte lo scambio delle premesse sull'assioma 2

5A. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\neg \forall x\, P(x) \to \exists\, z\, P(z)$$

Il tableau resta aperto

Quale delle seguenti interpretazioni ne è un modello?

- $D = N \ \ |P| = \{n \mid n \text{ pari}\}$ ☑
- $D = N \ \ |P| = \emptyset$ ☐

5 C. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è falsificabile

$$\neg \forall x\, P(x) \to \exists\, z\, P(z)$$

Il tableau della negata è aperto

Quale delle seguenti interpretazioni ne è un contromodello?

- $D = N \ \ |P| = \{n \mid n \text{ pari}\}$ ☐
- $D = N \ \ |P| = \emptyset$ ☑

6. (in presenza) Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall z\, (P(z) \to Q(z)) \to (\forall z\, P(z) \to \forall z\, Q(z))$$

$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z)),\ \forall z\, P(z)\}$	$\vdash \forall z\, (P(z) \to Q(z)) \to (P(a) \to Q(a))$	*Ax 4*
$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z)),\ \forall z\, P(z)\}$	$\vdash \forall z\, (P(z) \to Q(z))$	*Ass*
$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z)),\ \forall z\, P(z)\}$	$\vdash P(a) \to Q(a)$	*MP*
$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z)),\ \forall z\, P(z)\}$	$\vdash \forall z\, P(z) \to P(a)$	*Ax 4*
$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z)),\ \forall z\, P(z)\}$	$\vdash \forall z\, P(z)$	*Ass*
$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z)),\ \forall z\, P(z)\}$	$\vdash P(a)$	*MP*
$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z)),\ \forall z\, P(z)\}$	$\vdash Q(a)$	*MP*
$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z)),\ \forall z\, P(z)\}$	$\vdash \forall z\, Q(z)$	*G*
$\{\forall z\, (P(z) \to Q(z))\}$	$\vdash \forall z\, P(z) \to \forall z\, Q(z)$	*TD*
	$\vdash \forall z\, (P(z) \to Q(z)) \to (\forall z\, P(z) \to \forall z\, Q(z))$	*TD*

Esame dell'insegnamento di

METODI MATEMATICI - Canale A – L **B-D**

15- 01 - 2018 (proff. Labella, Cenciarelli)

1. Indichiamo con $\mathcal{P}$(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Una relazione simmetrica su A è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A \times A)$ ☐
- Una relazione transitiva su A è un sottoinsieme di $A \times A \times A$ ☐
- L'insieme delle relazioni di equivalenza su A è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A \times A)$ ☑
- L'insieme delle relazioni di equivalenza su A è un elemento di $\mathcal{P}(A \times A)$ ☐
- L'insieme delle relazioni di equivalenza su A è un elemento di $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ ☐

2. Siano f: A → B e g: B → A due funzioni. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Se $g \cdot f$ è biiettiva allora f è suriettiva ☐
- Se $g \cdot f$ è biiettiva allora f è iniettiva ☑
- $g \cdot f$ è biiettiva se e solo se f è iniettiva e g è suriettiva ☐
- Se $f \cdot g \cdot f$ è biiettiva allora f è iniettiva ☑
- Se $f \cdot g \cdot f$ è biiettiva allora f è suriettiva ☑

3. Dimostrare per induzione che $1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0,n-1} x^k$ con $x \in R$ per ogni naturale $n \geq 2$.

Caso base n=2 $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$

Passo induttivo: supponiamo l'uguaglianza vera per n, dimostriamola per n+1

$(1 - x) \sum_{k=0,n} x^k = (1 - x) (\sum_{k=0,n-1} x^k + x^n) = (1 - x) \sum_{k=0,n-1} x^k + (1 - x) x^n =$
$=1 - x^n + (1 - x) x^n = 1 - x^n + (1 - x) x^n = 1 - x^n + x^n - x^{n+1} =1 - x^{n+1}$

3t. (teledidattica) Quali fra le seguenti affermazioni sono vere per qualunque formula P e Q della logica predicativa?

- Se P → Q è soddisfacibile allora ogni modello di P è anche un modello di Q ☐
- Se P → Q è valida allora ogni modello di P è anche un modello di Q ☑
- Se P → Q è insoddisfacibile allora Q è insoddisfacibile ☑
- Se P → Q è insoddisfacibile allora P è valida ☑
- Se P → Q è soddisfacibile allora P e Q sono soddisfacibili ☐

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(\neg(A \vee (\neg B \vee C)) \vee (\neg A \vee C)))$$

Per definizione di $\rightarrow$ la formula si trasforma in

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow C))$$

e si ottiene usando due volte lo scambio delle premesse sull'assioma 2

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\exists z\, P(z) \rightarrow \neg \forall x\, P(x)$$

Il tableau resta aperto

Quale delle seguenti interpretazioni ne è un modello?

- $D = N \ |P| = \{n \mid n \text{ pari}\}$ ☑
- $D = N \ |P| = \emptyset$ ☑

6. (in presenza) Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(P \rightarrow \forall z\, Q(z)) \rightarrow \forall z\, (P \rightarrow Q(z))$$

$\{P \rightarrow \forall z\, Q(z), P\}$	$\vdash P \rightarrow \forall z\, Q(z)$	*Ass*
$\{P \rightarrow \forall z\, Q(z), P\}$	$\vdash P$	*Ass*
$\{P \rightarrow \forall z\, Q(z), P\}$	$\vdash \forall z\, Q(z)$	*MP*
$\{P \rightarrow \forall z\, Q(z), P\}$	$\vdash \forall z\, Q(z) \rightarrow Q(a)$	*Ax 4*
$\{P \rightarrow \forall z\, Q(z), P\}$	$\vdash Q(a)$	*MP*
$\{P \rightarrow \forall z\, Q(z)\}$	$\vdash P \rightarrow Q(a)$	*TD*
$\{P \rightarrow \forall z\, Q(z)\}$	$\vdash \forall z\, (P \rightarrow Q(z))$	*G*
	$\vdash (P \rightarrow \forall z\, Q(z)) \rightarrow \forall z\, (P \rightarrow Q(z))$	*TD*