Cognome ________________________________ **Nome**__________________ **Fila A**

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
4 - 2 - 2016 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Indichiamo con [n] la rappresentazione di von Neumann di un numero naturale n, ovvero: [0] = {}, [1] = {[0]} = {{}}, [2] = {[0], [1]} = {{}, {{}}}, … [n] = {[0], [1], …, [n-1]}, e indichiamo con [N] l'insieme di tutti i naturali di von Neumann: [N] = {[0], [1], … , [n]…}. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- $\{\} \in [N]$ ☑
- $\{\{\{\{\{\}\}\}\}\} \in [N]$ ☐
- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq [N]\times[N]$, è riflessiva ☐
- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq [N]\times[N]$, è antisimmetrica ☑
- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq [N]\times[N]$, è transitiva ☑

2. Indichiamo con [n] la rappresentazione di von Neumann di un numero naturale n, come sopra, e con #A la cardinalità di un insieme A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Esistono più di 77 funzioni da [4] a [3] ☑
- Esistono più di 77 funzioni da [3] a [4] ☐
- $\#[3] \cdot \#[4] \leq \#([3] \times [4])$ ☑
- una funzione da [n] a [m] ha un'inversa solo se n = m ☑
- non esistono funzioni da [0] a [n] se n ≠ 0 ☐

3. Definire (per induzione) n^m per ogni *m* nei naturali

Caso base $n^0=1$
Passo induttivo $n^{m+1}= n^m. n$

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(B\to C) \to ((\neg A\to \neg (B\to C)) \to A)$$

$\vdash ((B\to C) \to A) \to ((B\to C) \to A)$	Teor
$\vdash (\neg A\to \neg (B\to C)) \to ((B\to C) \to A)$	Contr
$\vdash (B\to C) \to ((\neg A\to \neg (B\to C)) \to A)$	Scambio premesse

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile e trovare almeno un modello

$$(\neg \forall x\, P(x) \wedge \exists x\, P(x)) \to \exists x\, \exists y\, Q(x,y)$$

Il tableau della formula resta aperto. Per il modello basta prendere un dominio non vuoto ed una relazione binaria soddisfatta da almeno una coppia di elementi.

Cognome ______________________________ **Nome**________________ **Fila B**

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
4 - 2- 2016 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Indichiamo con [n] la rappresentazione di von Neumann di un numero naturale n, ovvero: [0] = {}, [1] = {[0]} = {{}}, [2] = {[0], [1]} = {{}, {{}}}, … [n] = {[0], [1], …, [n-1]}, e indichiamo con [N] l'insieme di tutti i naturali di von Neumann: [N] = {[0], [1], … , [n]…}. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- $\{\} \in [N]$ ☑
- $\{[42]\} \in [N]$ ☐
- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq [N]\times[N]$, è di ordine ☐
- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq [N]\times[N]$, è di ordine stretto ☑
- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq [N]\times[N]$, è di equivalenza ☐

2. Indichiamo con [n] la rappresentazione di von Neumann di un numero naturale n, come sopra, e con #A la cardinalità di un insieme A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Esistono meno di 77 funzioni da [3] a [4] ☑
- Esistono meno di 77 funzioni da [4] a [3] ☐
- $\#[3] \cdot \#[4] \geq \#([3] \times [4])$ ☑
- una funzione da [n] a [m] è iniettiva solo se $n \leq m$ ☑
- non esistono funzioni suriettive da [n] a [0] se $n \neq 0$ ☑

3. Definire (per induzione) n^m per ogni *m* nei naturali

Caso base $n^0=1$
Passo induttivo $n^{m+1}= n^m.\ n$

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$((B\rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$\{(B\rightarrow B) \rightarrow A\} \vdash$	$(B\rightarrow B) \rightarrow A$	Ass.
$\vdash$	$(B\rightarrow B)$	Teor.
$\{(B\rightarrow B) \rightarrow A\} \vdash$	A	MP
$\vdash$	$((B\rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$	TD

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile e trovare almeno un modello

$$\forall x\ \exists y\ Q(x,y) \rightarrow \forall x\ \forall y\ Q(x,y)$$

Il tableau della formula resta aperto. Per il modello basta prendere un dominio non vuoto ed una relazione binaria soddisfatta da tutte le coppie di elementi.

Cognome ________________________________ **Nome**__________________ **Fila C**

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
4 - 2- 2016 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Indichiamo con [n] la rappresentazione di von Neumann di un numero naturale n, ovvero: [0] = {}, [1] = {[0]} = {{}}, [2] = {[0], [1]} = {{}, {{}}}, … [n] = {[0], [1], …, [n-1]}, e indichiamo con [N] l'insieme di tutti i naturali di von Neumann: [N] = {[0], [1], … , [n]…}. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq$ [N]×[N], è riflessiva ☐
- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq$ [N]×[N], è antisimmetrica ☑
- la relazione $\in$ di appartenenza definita su [N], $\in \subseteq$ [N]×[N], è transitiva ☑
- {} $\in$ [N] ☑
- {{{{{}}}}} $\in$ [N] ☐

2. Indichiamo con [n] la rappresentazione di von Neumann di un numero naturale n, come sopra, e con #A la cardinalità di un insieme A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Esistono più di 77 funzioni da [4] a [3] ☑
- Esistono più di 77 funzioni da [3] a [4] ☐
- una funzione da [n] a [m] ha un'inversa solo se n = m ☑
- non esistono funzioni da [0] a [n] se n ≠ 0 ☐
- #[3] · #[4] ≤ #([3] × [4]) ☑

3. Definire (per induzione) n^m per ogni *m* nei naturali

Caso base $n^0=1$
Passo induttivo $n^{m+1}= n^m. n$

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$A \to ((\neg (B\to C) \to \neg A) \to (B\to C))$$

$\vdash (A\to (B\to C)) \to (A\to (B \to C))$ Teor
$\vdash (\neg (B\to C) \to \neg A) \to (A\to (B \to C))$ Contr
$\vdash A \to ((\neg (B\to C) \to \neg A) \to (B\to C))$ Scambio premesse

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è valida e trovare almeno un modello

$$\neg \exists x\, P(x) \to (\forall x\, P(x) \to \forall x\, \exists y\, Q(x,y))$$

Il tableau della negata è chiuso, quindi ogni interpretazione è un modello.

Cognome _________________________________ Nome__________________ Fila D

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
4 - 2- 2016 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Indichiamo con [n] la rappresentazione di von Neumann di un numero naturale n, ovvero: [0] = {}, [1] = {[0]} = {{}}, [2] = {[0], [1]} = {{}, {{}}}, … [n] = {[0], [1], …, [n-1]}, e indichiamo con [N] l'insieme di tutti i naturali di von Neumann: [N] = {[0], [1], … , [n]…}. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- {[42]} ∈ [N] ☐
- la relazione ∈ di appartenenza definita su [N], ∈ ⊆ [N]×[N], è di ordine stretto ☑
- la relazione ∈ di appartenenza definita su [N], ∈ ⊆ [N]×[N], è di equivalenza ☐
- la relazione ∈ di appartenenza definita su [N], ∈ ⊆ [N]×[N], è di ordine ☐
- {} ∈ [N] ☑

2. Indichiamo con [n] la rappresentazione di von Neumann di un numero naturale n, come sopra, e con #A la cardinalità di un insieme A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- #[3] · #[4] ≥ #([3] × [4]) ☑
- Esistono meno di 77 funzioni da [3] a [4] ☑
- Esistono meno di 77 funzioni da [4] a [3] ☐
- una funzione da [n] a [m] è iniettiva solo se n ≤ m ☑
- non esistono funzioni suriettive da [n] a [0] se n ≠ 0 ☑

3. Definire (per induzione) n^m per ogni *m* nei naturali

Caso base $n^0=1$
Passo induttivo $n^{m+1}= n^m. n$

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \to \neg (B\to B)) \to \neg A$$

{ A → ¬ (B→ B)}	⊢ A → ¬ (B→ B)	Ass.
{ A → ¬ (B→ B)}	⊢ (B→ B) → ¬A	Contr.
	⊢ (B→ B)	Teor.
{ A → ¬ (B→ B)}	⊢ ¬A	MP
	⊢ (A → ¬ (B→ B)) → ¬A	TD

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è valida e trovare almeno un modello

$$\forall x\ P(x) \to (\neg\ \exists x\ P(x) \to \forall x\ \exists y\ Q(x,y))$$

Il tableau della negata è chiuso, quindi ogni interpretazione è un modello.