Cognome ________________________________ Nome__________________Fila A/C__

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
21 - 1 - 2014 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Sia A l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$; quale delle seguenti proposizioni è vera?:

- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$ ☑
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$ ☐
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))))$ ☑
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))))$ ☑

2. Sia A un insieme e sia $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ la funzione che associa ad ogni sottoinsieme di A il suo complemento. Quali delle seguenti proprietà è soddisfatta da f ?

- f è una relazione antiriflessiva, qualunque sia l'insieme A ☐
- f è una relazione simmetrica, qualunque sia l'insieme A ☑
- f è invertibile ed è identica alla sua inversa, qualunque sia l'insieme A ☑
- se $a \subseteq b$ allora $f(a) \subseteq f(b)$ ☐

3. Dimostrare (per induzione) che $5^{2n-1} + 4^{n+1}$ è divisibile per 21.

Caso base n=1 $5+4^2=21$

Passo induttivo: supponiamo che $5^{2n-1} + 4^{n+1}$ sia divisibile per 21 e dimostrimo che che $5^{2(n+1)-1} + 4^{n+1+1}$ è divisibile per 21.
$5^{2(n+1)-1} + 4^{n+1+1} = 5^{2n+1} + 4^{n+2} = 5^2\, 5^{2n-1} + 4\, 4^{n+1} = 25\ 5^{2n-1} + 4\, 4^{n+1} = (21+4)\, 5^{2n-1} + 4\, 4^{n+1} = 21\ 5^{2n-1} + 4(5^{2n-1} + 4^{n+1})$. I due addendi sono entrambi divisibili per 21.

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$B \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$$

$\{\neg C\}$ $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ Ax 1
$\vdash \neg C \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))$ TD
$\vdash B \rightarrow (\neg C \rightarrow (A \rightarrow B))$ scambio premesse
$\vdash B \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C)$ contr. e doppia neg.

5. Formalizzare in un linguaggio del primo ordine le seguenti frasi e dire se sono logicamente equivalenti.
Qualsiasi numero è pari oppure è dispari.
Ciascun numero è pari o ciascun numero è dispari.
P(x) essere un numero pari
$\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$
$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, \neg P(x)$
Le due formule non sono equivalenti. La prima implica la seconda, mentre l'implicazione inversa è soltanto soddisfacibile, come dimostra il prossimo esercizio.

6. Verificare con il metodo dei tableau che la seguente formula non è insoddisfacibile.

$$\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, \neg P(x))$$

Il tableau della formula resta aperto.

Cognome ________________________________ Nome_________________Fila B/D__

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
21 - 1 - 2014 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora) ☐ scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Sia A l'insieme $\mathcal{P}(\emptyset)$; quale delle seguenti proposizioni è vera?:

- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ ☑
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(A)$ ☐
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))))$ ☑
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))))$ ☑

2. Sia A un insieme e sia f : $\mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ la funzione che associa ad ogni sottoinsieme di A il suo complemento. Quali delle seguenti proprietà è soddisfatta da f ?

- qualunque sia l'insieme A, f non è mai una relazione riflessiva ☐
- f è una relazione antisimmetrica solo se A = $\emptyset$ ☑
- f è invertibile ed è identica alla sua inversa, qualunque sia l'insieme A ☑
- se $a \subseteq b$ allora $f(b) \subseteq f(a)$ ☑

3. Dimostrare (per induzione) che $5^{2n-1} + 4^{n+1}$ è divisibile per 21.

Caso base n=1 $5+4^2=21$

Passo induttivo: supponiamo che $5^{2n-1} + 4^{n+1}$ sia divisibile per 21 e dimostrimo che che $5^{2(n+1)-1} + 4^{n+1+1}$ è divisibile per 21.
$5^{2(n+1)-1} + 4^{n+1+1} = 5^{2n+1} + 4^{n+2} = 5^2\, 5^{2n-1} + 4\, 4^{n+1} = 25\ \ 5^{2n-1} + 4\, 4^{n+1} = (21+4)\, 5^{2n-1} + 4\, 4^{n+1} = 21\, 5^{2n-1} + 4(5^{2n-1} + 4^{n+1})$. I due addendi sono entrambi divisibili per 21.

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$\neg (A \to B) \to (B \to C)$$

$\{\neg C\}$ $\vdash B \to (A \to B)$ Ax 1
$\vdash \neg C \to (B \to (A \to B))$ TD
$\vdash B \to (\neg C \to (A \to B))$ scambio premesse
$\vdash B \to (\neg (A \to B) \to C)$ contr. e doppia neg.
$\vdash \neg (A \to B) \to (B \to C)$ scambio premesse

5. Formalizzare in un linguaggio del primo ordine le seguenti frasi e dire se sono logicamente equivalenti.
Qualsiasi numero è pari oppure è dispari.
Ciascun numero è pari o ciascun numero è dispari.
P(x) essere un numero pari
$\forall x\, (P(x) \lor \neg P(x))$
$\forall x\, P(x) \lor \forall x\, \neg P(x)$
Le due formule non sono equivalenti. La prima implica la seconda, come dimostra il prossimo esercizio, mentre l'implicazione inversa è soltanto soddisfacibile.

6. Verificare con il metodo dei tableau che la seguente formula è valida.

$$(\forall x\, P(x) \lor \forall x\, \neg P(x)) \to \forall x\, (P(x) \lor \neg P(x))$$

Il tableau della negata è chiuso.