Cognome ________________________________ **Nome**_________________ **A**

Prova scritta di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
7 - 09 - 2016 (proff. Anna Labella – Pietro Cenciarelli)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Indichiamo con $|X|$ e con $\mathcal{P}(X)$ rispettivamente la cardinalità e l'insieme dei sottoinsiemi di X. Siano $U_0 = \emptyset$ e $U_{n+1} = \mathcal{P}(U_n)$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- $U_n \in U_{n+1}$ ☑
- $U_n \subseteq U_{n+1}$ ☑
- se $X \in U_n$ allora $X \subseteq U_n$ ☑
- se $X \subseteq U_n$ allora $X \in U_n$ ☐
- se $X \in U_n$ allora $|X| \leq n$ ☐

2. Sia R l'insieme dei numeri reali, $\mathcal{P}(R)$ l'insieme dei suoi sottoinsiemi e $f: \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R)$ la funzione che associa ad ogni insieme X l'insieme $f(X) = \{x \in X : y < x < z$ per qualche y e z in $X\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- f è iniettiva ☐
- f è suriettiva ☐
- esiste X in $\mathcal{P}(R)$ tale che $X = f(X)$ ☑
- se $f(X) \subseteq f(Y)$ allora $X \subseteq Y$ ☐
- f è una relazione antisimmetrica ☑

3. La successione dei numeri di Fibonacci sia così definita:
$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$
Dimostrare (per induzione) che, per ogni numero naturale *n*, $\sum_{k=o,n} F_k = F_{n+2} - 1$

Caso base $\sum_{k=0,0} F_k = F_0 = 0 = F_2 - 1$
Passo induttivo: supponiamo $\sum_{k=o,n} F_k = F_{n+2} - 1$ e dimostriamo $\sum_{k=o,n+1} F_k = F_{n+3} - 1$
$\sum_{k=o,n+1} F_k = \sum_{k=o,n} F_k + F_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1$

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \wedge \neg B) \to \neg B$$

$\vdash B \to (A \to B)$	Ax1
$\vdash \neg(A \to B) \to \neg B$	contr
$\vdash (A \wedge \neg B) \to \neg B$	def. $\wedge$ e $\neg\neg$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\exists x \exists y\, P(x,y) \to \forall x \forall y\, P(x,y)$$

Il tableau della formula rimane aperto.

6. Trovare un modello per la formula dell'esercizio 5.
Basta prendere un dominio con un solo elemento *a* e (*a,a*) in P.

Cognome ______________________________ Nome________________ **B**

Prova scritta di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
7 - 09 - 2016 (proff. Anna Labella – Pietro Cenciarelli)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Indichiamo con $|X|$ e con $\mathcal{P}(X)$ rispettivamente la cardinalità e l'insieme dei sottoinsiemi di X. Siano $U_0 = \{7\}$ e $U_{n+1} = \mathcal{P}(U_n)$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- $U_n \in U_{n+1}$ ☑
- $U_n \subseteq U_{n+1}$ ☐
- se $X \in U_n$ allora $X \subseteq U_n$ ☐
- se $X \subseteq U_n$ allora $X \in U_n$ ☐
- se $X \in U_n$ allora $|X| \leq 2^n$ ☐

2. Sia R l'insieme dei numeri reali, $\mathcal{P}(R)$ l'insieme dei suoi sottoinsiemi e $f:\mathcal{P}(R) \rightarrow \mathcal{P}(R)$ la funzione che associa ad ogni insieme X l'insieme $f(X) = \{x \in X : y < x < z$ per qualche y e z in $X\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- f è invertibile ☐
- $X = f(X)$ solo se $X = R$ ☐
- Se $X \subseteq Y$ allora $f(X) \subseteq f(Y)$ ☑
- f è una relazione antisimmetrica ☑
- f è una relazione d'ordine ☐

3. La successione dei numeri di Fibonacci sia così definita:
$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$
Dimostrare (per induzione) che, per ogni numero naturale *n*, $\sum_{k=o,n} F_k = F_{k+2} - 1$

Caso base $\sum_{k=0,0} F_k = F_0 = 0 = F_2 - 1$
Passo induttivo: supponiamo $\sum_{k=o,n} F_k = F_{n+2} - 1$ e dimostriamo $\sum_{k=o,n+1} F_k = F_{n+3} - 1$
$\sum_{k=o,n+1} F_k = \sum_{k=o,n} F_k + F_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1$

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \wedge \neg B) \rightarrow A$$

$\vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ax1
$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$	contr
$\vdash \neg (A \rightarrow B) \rightarrow A$	contr
$\vdash (A \wedge \neg B) \rightarrow A$	def. $\wedge$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\forall x \forall y\, P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y\, P(x,y)$$

Il tableau della formula rimane aperto

6. Trovare un modello per la formula dell'esercizio 5.
La formula è in realtà valida, perciò ogni interpretazione è un modello.