A

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
17 - 6 - 2019 (prof.ssa Anna Labella)

1. Indicando con A e B generici sottoinsiemi di un universo U non vuoto, con $\overline{A}$ il complemento di A rispetto ad U, e rispettivamente con S, I e T le seguenti opzioni: S = *esistono A e B per i quali la proposizione è vera*, I = *non esistono A e B per i quali la proposizione è vera*, T = *la proposizione è vera per ogni A e B*, indicare le opzioni corrette (possono essere più d'una) per ciascuna delle seguenti proposizioni:

- se $A \cap B \subseteq B$ allora $A \subseteq B$ S▣ I☐ T☐
- se $A \cup B \subseteq A$ allora $B \subseteq A$ S▣ I☐ T▣
- $A \subseteq A \cup (B \cap \overline{A})$ S▣ I☐ T▣
- se $A \subseteq \overline{A}$ allora $\overline{A} \subseteq A$ S▣ I☐ T☐
- $B \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup (\overline{A} \cap B)$ S▣ I☐ T☐

2. Siano R ed S relazioni di equivalenza su un insieme finito non vuoto. Quali delle seguenti proposizioni sono vere?

- $R \cap S$ è sempre una relazione di equivalenza ▣
- $R \cap S$ non è mai una relazione di equivalenza ☐
- $R \setminus S$ può essere una relazione di equivalenza ☐
- $R \setminus S$ è sempre una relazione di equivalenza ☐
- $R \cup S$ può essere una relazione di equivalenza ▣

3. Dimostrare (per induzione) che, per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Caso base *n=1* *1 = 4/4*

Passo induttivo $\sum_{k=1,..,n+1} k^3 = \sum_{k=1,..,n} k^3 + (n+1)^3 = (n(n+1)/2)^2 + (n+1)^3 = ((n+2)(n+1)/2)^2$

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \to B) \to (\neg (A \to B) \to A)$$

$\vdash (A \to B) \to (\neg A \to (A \to B))$ Ax. 1
$\vdash (A \to B) \to (\neg (A \to B) \to A)$ Contr.

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\forall x\, (\exists y\, Q(y) \wedge \neg P(x)) \to (\forall y\, Q(y) \to \exists z\, P(z))$$

Il tableau della formula resta aperto.

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall y\, (Q(y) \to (P(a) \to Q(y)))$$

$\vdash Q(b) \to (P(a) \to Q(b))$ Ax. 1
$\vdash \forall y\, (Q(y) \to (P(a) \to Q(y)))$ G

B

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
17 - 6 - 2019 (prof.ssa Anna Labella)

1. Indicando con A e B generici sottoinsiemi di un universo U non vuoto, con $\bar{A}$ il complemento di A rispetto ad U, e rispettivamente con S, I e T le seguenti opzioni: S = *esistono A e B per i quali la proposizione è vera*, I = *non esistono A e B per i quali la proposizione è vera*, T = *la proposizione è vera per ogni A e B*, indicare le opzioni corrette (possono essere più d'una) per ciascuna delle seguenti proposizioni:

- $B \cup (A \cap B) = \bar{A} \cup (\bar{A} \cap B)$ S▣ I☐ T☐
- se $A \cup B \subseteq A$ allora $B \subseteq A$ S▣ I☐ T▣
- se $A \subseteq \bar{A}$ allora $\bar{A} \subseteq A$ S▣ I☐ T☐
- se $A \cap B \subseteq B$ allora $A \subseteq B$ S▣ I☐ T☐
- $A \subseteq A \cup (B \cap \bar{A})$ S▣ I☐ T▣

2. Siano R ed S relazioni di equivalenza su un insieme finito non vuoto, con rispettivamente n ed m classi di equivalenza. Quali delle seguenti proposizioni sono false?

- $R \cap S$ è sempre una relazione di equivalenza ☐
- $R \cap S$ non è mai una relazione di equivalenza ▣
- $R \setminus S$ può essere una relazione di equivalenza ▣
- $R \setminus S$ è sempre una relazione di equivalenza ▣
- $R \cup S$ può essere una relazione di equivalenza ☐

3. Dimostrare (per induzione) che, per ogni $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Caso base $n=1$ $1 = 4/4$

Passo induttivo $\sum_{k=1,..,n+1} k^3 = \sum_{k=1,..,n} k^3 + (n+1)^3 = (n(n+1)/2)^2 + (n+1)^3 = ((n+2)(n+1)/2)^2$

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(B \to A) \to (\neg (B \to A) \to A)$$

|- $(B \to A) \to (\neg A \to (B \to A))$ Ax. 1
|- $(B \to A) \to (\neg (B \to A) \to A)$ Contr.

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\exists x (\forall y\, Q(y) \wedge \neg P(x)) \to (\forall y\, Q(y) \to \neg \exists z\, P(z))$$

Il tableau della formula resta aperto.

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall y (Q(y) \vee \neg Q(y))$$

|- $\neg Q(b) \to \neg Q(b)$ Teorema
|- $Q(b) \vee \neg Q(b)$ def. ∨
|- $\forall y (\neg Q(y) \to \neg Q(y))$ G