A

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
02- 07 - 2018 (prof. Labella)

- ☐ **prima parte (soltanto esercizi 1,2,3; tempo 1 ora)**
- ☐ **seconda parte (soltanto esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)**
- ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**
- ☐ **in presenza (esercizi 1,2,3,4,5, 6p; tempo 2 ore)**
- ☐ **teledidattica (esercizi 1,2,3,4,5,6t; tempo 2 ore)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Siano A e B insiemi tali che, per ogni $X \subseteq B$, $X \in A$ se e solo se $X \subseteq A$. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

- Non possono esistere due insiemi siffatti. ☐
- A è infinito se e soltanto se B è infinito. ☐
- $A \cap B \in A$. ☐
- $A \subseteq B$. ☐
- Se $\varnothing \in B$ allora $\varnothing \in A$. ☑

2. Sia F l'insieme delle funzioni da N (l'insieme dei naturali) in N, e sia $R \subseteq F \times F$ la relazione tale che f R g se e solo se la funzione composta $f \cdot g$ è suriettiva. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

- R è riflessiva. ☐
- R è simmetrica. ☐
- R è antisimmetrica ☐
- R è transitiva. ☐
- g è suriettiva se e solo se esiste f tale che g R f ☑

3. Dimostrare per induzione che in ogni albero finito il numero dei nodi supera di una unità il numero degli archi.
Per induzione sul numero dei nodi $\#_n$
Se $\#_n = 1$, abbiamo l'albero che non ha archi, cioè $\#_a = 0$
Se la proprietà è vera per alberi con $\#_n = k$ e aggiungiamo un nodo, questo comporterà l'incremento di uno ed un solo arco, perché l'albero non può essere sconnesso né contenere cicli.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$$

$\vdash (A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$	*Teorema*
$\vdash A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$	*Scambio premesse*

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

Il tableau della formula resta aperto.
Quale delle seguenti interpretazioni ne è un modello?

- $D = N \ \ |P| = \{n \mid n \text{ pari}\} \ |Q| = \{n \mid n \text{ multiplo di } 4\}$ ☑
- $D = N \ \ |P| = \varnothing \ \ |Q| = \{n \mid n \text{ pari}\}$ ☑

6p. (in presenza) Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall z\, (P(z) \wedge Q(z)) \to (P(z) \to \wedge\, Q(z))$$

$\{ Q(a) \} \vdash \neg P(a) \to (P(a) \to Q(a))$	*Proposizione 8.5*
$\vdash Q(a) \to (\neg P(a) \to (P(a) \to Q(a)))$	*T.D.*
$\vdash Q(a) \to (\neg (P(a) \to Q(a)) \to P(a))$	*Contrapposizione*
$\vdash (\neg (P(a) \to Q(a)) \to (Q(a) \to P(a)))$	*Scambio di premesse*
$\vdash \forall z\, (\neg (P(z) \to Q(z)) \to (Q(z) \to P(z)))$	*Generalizzazione*

B

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
02- 07 - 2018 (prof. Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Siano A e B insiemi tali che, per ogni $X \subseteq B$, $X \in A$ se e solo se $X \subseteq A$. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

- Se $\varnothing \in B$ allora $\varnothing \in A$. ☑
- A è infinito se e soltanto se B è infinito. ☐
- $A \cap B \in A$. ☐
- $A \subseteq B$. ☐
- Non possono esistere due insiemi siffatti. ☐

2. Sia F l'insieme delle funzioni da N (l'insieme dei naturali) in N, e sia $R \subseteq F \times F$ la relazione tale che f R g se e solo se la funzione composta $f \cdot g$ è suriettiva. Quali fra le seguenti affermazioni sono vere?

- R è transitiva. ☐
- R è antisimmetrica. ☐
- R è simmetrica. ☐
- R è riflessiva. ☐
- g è suriettiva se e solo se esiste f tale che g R f. ☑

3. Dimostrare per induzione che in ogni albero finito il numero dei nodi supera di una unità il numero degli archi.
Per induzione sul numero dei nodi $\#_n$
Se $\#_n= 1$, abbiamo l'albero che non ha archi, cioè $\#_a= 0$
Se la proprietà è vera per alberi con $\#_n= k$ e aggiungiamo un nodo, questo comporterà l'incremento di uno ed un solo arco, perché l'albero non può essere sconnesso né contenere cicli.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$A \to ((B \to \neg A) \to \neg B)$$

$\vdash (B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$	*Contrapposizione*
$\vdash A \to ((B \to \neg A) \to \neg B)$	*Scambio premesse*

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

Il tableau della formula resta aperto.
Quale delle seguenti interpretazioni ne è un modello?

- $D = N$ $|P| = \{n \mid n \text{ pari}\}$ $|Q| = \{n \mid n \text{ multiplo di } 4\}$ ☑
- $D = N$ $|P| = \varnothing$ $|Q| = \{n \mid n \text{ pari}\}$ ☑

6p. (in presenza) Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall z\, ((P(z) \to Q(z)) \vee (Q(z) \to P(z)))$$

$\{ Q(a) \} \vdash \neg P(a) \to (P(a) \to Q(a))$	*Proposizione 8.5*
$\vdash Q(a) \to (\neg P(a) \to (P(a) \to Q(a)))$	*T.D.*
$\vdash Q(a) \to (\neg (P(a) \to Q(a)) \to P(a))$	*Contrapposizione*
$\vdash (\neg (P(a) \to Q(a)) \to (Q(a) \to P(a)))$	*Scambio di premesse*
$\vdash (P(a) \to Q(a)) \vee (Q(a) \to P(a))$	*Definizione di* $\vee$
$\vdash \forall z\, ((P(z) \to Q(z)) \vee (Q(z) \to P(z)))$	*Generalizzazione*