Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L Fila A
15 - I - 2013 (prof.ssa Anna Labella)

1. Dati due insiemi A e B, indichiamo con ⟨A, B⟩ l'insieme {A, {A, B}} e, come di consueto, indichiamo con ∅ l'insieme vuoto. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- B ∈ ⟨A, B⟩ ☐
- A ⊆ ⟨A, B⟩ ☐
- ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ per qualunque A e B ☐
- ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ per qualunque A se B = ∅ ☐
- ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ solo se A = B X

2. Indichiamo con A* l'insieme di tutte le sequenze *finite* di elementi di un insieme A (compresa la sequenza *vuota*). Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- Se A ≠ ∅, allora non può esistere una funzione suriettiva f: A → A* ☐
- Non può esistere una funzione suriettiva f: A → A* ☐
- Se A ≠ ∅, allora non può esistere una funzione iniettiva g: A* → A ☐
- Non può esistere una funzione iniettiva g: A* → A ☐
- Se A ha la potenza del numerabile, allora esiste una funzione biiettiva h: A → A* X

3. Dimostrare (per induzione) che la somma di due numeri naturali è commutativa
Si deve dimostrare che m+n=n+m per ogni coppia di numeri naturali supponendo valida l'associatività. Per induzione su n:
Caso base m+0=0+m : basta far vedere che 0+m=m per induzione su m:
caso base: 0+0 = 0 per definizione
passo induttivo 0+k=k → 0+s(k)= s(k): 0+s(k) =s(0+k) =s(k) per definizione e per ipotesi
Passo induttivo m+k=k+m → m + s(k)= s(k) + m. Per definizione, per associatività e per ipotesi
m + s(k)= s(m+k)
s(k) + m = (k + s(0)) + m = k + (s(0) + m) = k + s(m) = s(k + m) == s(m+k)

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

{ A}	$\vdash \neg B \to (A \to \neg B)$	Ax 1
{ A}	$\vdash \neg(A \to \neg B) \to B)$	contr
	$\vdash (A \to (\neg(A \to \neg B) \to B))$	TD
	$\vdash (A \to (A \wedge B \to B))$	Def ∧

5. Si dimostri che la seguente formula è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$\exists x \exists y\, (P(x,y) \wedge P(y,x)) \to \forall x \forall y\, (P(x,y) \wedge P(y,x))$$

Mostrare che il tableau della formula ha un ramo aperto

6. Trovare un modello per la formula di cui al punto 5
Basta prendere un qualunque dominio D e |P| = Ø

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L Fila C
15 - I - 2013 (prof.ssa Anna Labella)

1. Dati due insiemi A e B, indichiamo con ⟨A, B⟩ l'insieme {A, {A, B}} e, come di consueto, indichiamo con ∅ l'insieme vuoto. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- A ⊆ ⟨A, B⟩ ☐
- B ∈ ⟨A, B⟩ ☐
- ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ solo se A = B X
- ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ per qualunque A e B ☐
- ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ per qualunque A se B = ∅ ☐

2. Indichiamo con A* l'insieme di tutte le sequenze *finite* di elementi di un insieme A (compresa la sequenza *vuota*). Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- Se A ≠ ∅, allora non può esistere una funzione suriettiva f: A → A* ☐
- Non può esistere una funzione suriettiva f: A → A* ☐
- Se A ≠ ∅, allora non può esistere una funzione iniettiva g: A* → A ☐
- Non può esistere una funzione iniettiva g: A* → A ☐
- Se A ha la potenza del numerabile, allora esiste una funzione biiettiva h: A → A* X

3. Dimostrare (per induzione) che la somma di due numeri naturali è commutativa

Si deve dimostrare che m+n=n+m per ogni coppia di numeri naturali supponendo valida l'associatività. Per induzione su n:
Caso base m+0=0+m : basta far vedere che 0+m=m per induzione su m:
caso base: 0+0 = 0 per definizione
passo induttivo 0+k=k → 0+s(k)= s(k): 0+s(k) =s(0+k) =s(k) per definizione e per ipotesi
Passo induttivo m+k=k+m → m + s(k)= s(k) + m. Per definizione, per associatività e per ipotesi
m + s(k)= s(m+k)
s(k) + m = (k + s(0)) + m = k + (s(0) + m) = k + s(m) = s(k + m) == s(m+k)

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\vdash (A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$	Th
$\vdash A \to ((A \to \neg B) \to B)$	scambio
$\vdash A \to (B \to \neg (A \to \neg B))$	contr
$\vdash A \to (B \to A \wedge B)$	Def ∧

5. Si dimostri che la seguente formula è falsificabile usando il metodo dei tableau

$$\exists x \exists y\, (P(x,y) \wedge P(y,x)) \to \forall x \forall y\, (P(x,y) \wedge P(y,x))$$

Mostrare che il tableau della negata ha un ramo aperto.

6. Trovare un contromodello per la formula di cui al punto 5
Basta prendere un qualunque dominio D che abbia almeno un altro elemento oltre a e $|P| = \{(a, a)\}$.

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L Fila B
15 - I - 2013 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora) **☐ scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Dati due insiemi A e B, indichiamo con $\langle A, B\rangle$ l'insieme $\{A, \{A, B\}\}$ e, come di consueto, indichiamo con $\varnothing$ l'insieme vuoto. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- $A \in \langle A, B\rangle$ X
- $B \subseteq \langle A, B\rangle$ ☐
- $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$ per qualunque A e B ☐
- $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$ per qualunque B se $A = \varnothing$ ☐
- se $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$ allora A = B X

2. Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione su un insieme A. Indichiamo con dom (R) il seguente insieme:

$$\text{dom}(R) = \{a \in A : \text{esiste } a' \in A \text{ tale che } (a, a') \in R\}.$$

Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- Se R è sia riflessiva che antiriflessiva allora dom (R) = $\varnothing$ X
- Se R è sia riflessiva che antiriflessiva allora A = $\varnothing$ X
- Se R è sia riflessiva che simmetrica e A = $\varnothing$ allora R è anche transitiva X
- Se R è sia simmetrica che transitiva e dom (R) = A allora R è anche riflessiva X
- Se R è sia simmetrica che antisimmetrica, allora R è anche transitiva X

3. Dimostrare (per induzione) che la somma di due numeri naturali è commutativa

Si deve dimostrare che m+n=n+m per ogni coppia di numeri naturali supponendo valida l'associatività. Per induzione su n:
Caso base m+0=0+m : basta far vedere che 0+m=m per induzione su m:
caso base: 0+0 = 0 per definizione

passo induttivo 0+k=k → 0+s(k)= s(k): 0+s(k) =s(0+k) =s(k) per definizione e per ipotesi

Passo induttivo m+k=k+m → m + s(k)= s(k) + m. Per definizione, per associatività e per ipotesi
m + s(k)= s(m+k)
s(k) + m = (k + s(0)) + m = k + (s(0) + m) = k + s(m) = s(k + m) == s(m+k)

4. Si dimostri che la seguente formula è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\{P(a,a)\}$ $\vdash$	$(\exists x\forall y\, P(x,y) \rightarrow \forall x\exists y\, P(y,x))$	Th
$\vdash$	$P(a,a) \rightarrow (\exists x\forall y\, P(x,y) \rightarrow \forall x\exists y\, P(y,x))$	TD
$\vdash$	$\exists x\forall y\, P(x,y) \rightarrow (P(a,a) \rightarrow \forall x\exists y\, P(y,x))$	scambio

5. Si dimostri che il seguente enunciato è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$(B\vee A) \rightarrow (A\wedge B)$$

Mostrare che il tableau della formula ha un ramo aperto

6. Trovare un modello per l'enunciato di cui al punto 5
Basta che A e B siano entrambe vere o entrambe false

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L Fila D
15 - I - 2013 (prof.ssa Anna Labella)

1. Dati due insiemi A e B, indichiamo con ⟨A, B⟩ l'insieme {A, {A, B}} e, come di consueto, indichiamo con ∅ l'insieme vuoto. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- B ⊆ ⟨A, B⟩ ☐
- A ∈ ⟨A, B⟩ X
- ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ per qualunque B se A = ∅ ☐
- ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ per qualunque A e B ☐
- se ⟨A, B⟩ = ⟨B, A⟩ allora A = B X

2. Sia R ⊆ A × A una relazione su un insieme A. Indichiamo con dom (R) il seguente insieme:

dom (R) = {a ∈ A : esiste a' ∈ A tale che (a, a') ∈ R}.

Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- Se R è sia simmetrica che antisimmetrica, allora R è anche transitiva X
- Se R è sia riflessiva che antiriflessiva allora dom (R) = ∅ X
- Se R è sia riflessiva che antiriflessiva allora A = ∅ X
- Se R è sia riflessiva che simmetrica e A = ∅ allora R è anche transitiva X
- Se R è sia simmetrica che transitiva e dom (R) = A allora R è anche riflessiva X

3. Dimostrare (per induzione) che la somma di due numeri naturali è commutativa

Si deve dimostrare che m+n=n+m per ogni coppia di numeri naturali supponendo valida l'associatività. Per induzione su n:
Caso base m+0=0+m : basta far vedere che 0+m=m per induzione su m:
caso base: 0+0 = 0 per definizione

passo induttivo 0+k=k → 0+s(k)= s(k): 0+s(k) =s(0+k) =s(k) per definizione e per ipotesi

Passo induttivo m+k=k+m → m + s(k)= s(k) + m. Per definizione, per associatività e per ipotesi
m + s(k)= s(m+k)
s(k) + m = (k + s(0)) + m = k + (s(0) + m) = k + s(m) = s(k + m) == s(m+k)

4. **Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert**

|— ∀x P(x) → ∃x P(x) Th
|— ∀y P(y) → ∃x P(x) sost
|— ¬∃x P(x) → ¬∀y P(y) contr

5. Si dimostri che il seguente enunciato è falsificabile usando il metodo dei tableau

(B∨A) → (A∧B)

Mostrare che il tableau della formula negata ha un ramo aperto

6. Trovare un contromodello per la formula di cui al punto 5
Basta che A e B abbiano valori di verità diversi.