Cognome ________________________________ Nome_________________File A/C_

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
05 - 02 - 2013 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora) ☐ scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Come di consueto, indichiamo con ∅ l'insieme vuoto e con ℘(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (B \cup A)$ per ogni A e B _
- se $A = \wp(A)$ allora $A = \emptyset$ ☑
- se $A \subseteq \wp(A)$ allora $A = \emptyset$ _
- se $A \in \wp(A)$ allora $A = \emptyset$ _

2A. Sia A l'insieme $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\},\ldots\}$ e sia $R \subseteq \wp(A) \times \wp(A)$ la relazione:

$$R = \{(a, B) : a \in B\}.$$

Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta?

Riflessiva _ Antiriflessiva ☑ Simmetrica _ Antisimmetrica ☑ Transitiva ☑

2C.

- Definire, se esiste, una funzione che, se considerata come relazione, sia riflesiva, simmetrica e transitiva.
  [identità]
- Definire, se esiste, una funzione f non iniettiva e tale che f = f • f.
  [f(n) = il più piccolo numero primo maggiore o uguale a n]

3. Ricordiamo la definizione dell'operazione di fattoriale di un numero:

0! =1
(n+1)! = (n+1) n!
Dimostrare per induzione che sarebbe sciocco porre 0! =0

Si può facilmente intuire che una tale modifica porterebbe a n!=0 per ogni n.
La dimostrazione di questo fatto è la seguente.
Il caso base è dato per definizione .
Passo induttivo: se n!=0 allora (n+1)! =(n+1) n! = (n+1) 0 =0

4A. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\{A\} \vdash \neg B \to (A \to \neg B)$	Ax 1
$\{A\} \vdash (\neg (A \to \neg B) \to B)$	contr
$\vdash A \to (\neg (A \to \neg B) \to B)$	TD
$\vdash \neg (A \to \neg B) \to (A \to B)$	scambio
$\vdash (A \land B) \to (A \to B))$	Def ∧

5A. Si dimostri che la seguente formula è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$\exists x \exists y\, P(x,y) \land \exists x \exists y\, \neg P(y,x))$$

Il tableau resta aperto

6A. Trovare un modello per la formula di cui al punto 5 A
Basta prendere un dominio con almeno due elementi ed una relazione non banale per P

4C. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\vdash (A\rightarrow \neg B) \rightarrow (A\rightarrow \neg B)$	Th
$\vdash (A\rightarrow ((A\rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B)$	scambio
$\vdash (A\rightarrow (B \rightarrow \neg (A\rightarrow \neg B))$	contr
$\vdash (A\rightarrow (B \rightarrow A\wedge B))$	Def $\wedge$

5C. Si dimostri che la seguente formula è falsificabile usando il metodo dei tableau

$$\forall x\forall y\ P(x,y) \vee \forall x\forall y\ \neg P(y,x))$$

Il tableau della negata resta aperto

6C. Trovare un contromodello per la formula di cui al punto 5 C
Basta prendere un dominio con almeno due elementi ed una relazione non banale per P

Cognome ________________________________ Nome__________________File B/D

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
05 - 02 - 2013 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Come di consueto, indichiamo con ∅ l'insieme vuoto e con $\wp$(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$ per ogni A e B ☑
- se A = $\wp$(A) allora $\wp$(A) = ∅ ☑
- se A ⊆ $\wp$(A) allora $\wp$(A) = ∅ _
- se A ∈ $\wp$(A) allora $\wp$(A) = ∅ _

2B. Sia A l'insieme $\emptyset \cup \wp(\emptyset) \cup \wp(\wp(\emptyset)) \cup \wp(\wp(\wp(\emptyset))) \cup \ldots$ e sia $R \subseteq A \times A$ la relazione:

$$R = \{(a, B) : a \subseteq B\}.$$

Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta?

Riflessiva ☑ Antiriflessiva _ Simmetrica _ Antisimmetrica ☑ Transitiva ☑

2D.

- Definire, se esiste, una funzione che, se considerata come relazione, sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

[successore]

- Definire, se esiste, una funzione f non suriettiva e tale che f = f • f.

Una fuzione costante

3. Ricordiamo la definizione dell'operazione di potenza di un numero *k*:

$k^0 = 1$

$k^{n+1} = k\, k^n$

Dimostrare per induzione che sarebbe sciocco porre $k^0 = 0$

Si può facilmente intuire che una tale modifica porterebbe a $k^n = 0$ per ogni n.
La dimostrazione di questo fatto è la seguente.
Il caso base è dato per definizione .
Passo induttivo: se $k^n = 0$ allora $k^{n+1} = k\, k^n = k^{n+1} = k\, 0 = 0$

4B. Si dimostri che la seguente formula è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\{ P(a,a) \} \vdash \forall x \forall y\, P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y\, P(y,x)$ Th

$\vdash P(a,a) \rightarrow (\forall x \forall y\, P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y\, P(y,x))$ TD

$\vdash \forall x \forall y\, P(x,y) \rightarrow (P(a,a) \rightarrow \exists x \exists y\, P(y,x))$ scambio

5B. Si dimostri che il seguente enunciato è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$B \rightarrow (A \wedge B)$$

Il tableau resta aperto

6B. Trovare un modello per l'enunciato di cui al punto 5 B

v(B) = F   oppure v(A)=v(B) = V

4D. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\{ \forall x \forall y \neg P(x,y) \} \vdash P(a,a) \rightarrow \exists x \exists y P(y,x)$ Th

$\vdash \forall x \forall y \neg P(x,y) \rightarrow (P(a,a) \rightarrow \exists x \exists y P(y,x))$ TD

5D. Si dimostri che il seguente enunciato non è falsificabile usando il metodo dei tableau

$$(B \wedge A) \rightarrow (A \vee B)$$

Il tableau della negata è chiuso

6D. Trovare un contromodello per la formula di cui al punto 5 D

Essendo una tautologia, non ha contromodelli