"Sapienza" Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'Informatica, canale A-D
Primo esonero, a.a. 2008/09 – FILA A

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {Ø , a, {a, b}, {b}}, B = {{Ø}, a, {b}, c, {b, c}}.
Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, dove per un insieme I, P(I) indica l'insieme delle parti di I.

A.	{Ø, {Ø}} ⊂ (A ∪ B)	☐ Vero	☐ Falso
B.	{Ø} ∈ P(A ∩ B)	☐ Vero	☐ Falso
C.	{Ø, a, b} ⊂ P(A \ B)	☐ Vero	☐ Falso
D.	(A ∩ B) ∈ P(A \ B)	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che A ∩ B ≠ Ø. Allora

A.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	B deve essere vuoto	☐ Vero	☐ Falso
C.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	B non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Sia A = {a, b, c, d} e R = {(a,b), (b,c)}:

A. R è una relazione di ordine stretto
☐ a. sì
☐ b. no, perchè non gode della/e proprietà:____

B. la chiusura transitiva di R, <u>R</u>
☐ a. è R stessa
☐ b. deve contenere la/e ulteriori coppia/e:____

C. la chiusura transitiva di R, <u>R</u>
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:________________________________

D. Le risposte precedenti cambierebbero considerando R' = R ∪ Δ_A?
☐ a. no
☐ b. sì; in particolare ____
(si elenchino le differenze)

4. Sia R una relazione binaria. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se R è un'equivalenza, allora la sua inversa coincide con R	☐ Vero	☐ Falso
B.	se R è un ordine, allora la sua inversa coincide con R	☐ Vero	☐ Falso
C.	se R coincide con la sua inversa, allora è di equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
D.	se R coincide con la sua inversa, allora è un ordine	☐ Vero	☐ Falso

5. Siano f e g funzioni totali. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se $f \circ g$ è iniettiva allora f è iniettiva	☐ Vero	☐ Falso
B.	se $g \circ f$ è iniettiva allora f è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
C.	se $f \circ g$ è suriettiva allora f è iniettiva	☐ Vero	☐ Falso
D.	se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri per induzione che $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, selezionando come caso base il minimo n ∈ **N** che soddisfa questa proprietà.

Soluzioni FILA A:

1. Risposte vere: A

2. Risposte vere: C, D

3. Risposte:
    - A: b (non gode della proprietà transitiva)
    - B: b (deve contenere la coppia (a,c))
    - C: b (non gode delle proprietà riflessiva e simmetrica)
    - D: b, in particolare
        - A: b (non gode delle proprietà transitiva e antiriflessiva)
        - C: b (non gode della proprietà simmetrica)

4. Risposte vere: A

5. Risposte vere: D

6. Applichiamo l'induzione su *n*.

Caso base: se *n*=1 otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $\sum_{k=1}^{1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{2+1}{(2)^2} = \frac{3}{4}$ e $1 - \frac{1}{(2)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Quindi *n*=1 è il minimo n $\in$ **N** che soddisfa questa proprietà.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ è soddisfatta per un qualsiasi valore *n*.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per *n*+1, cioè vogliamo dimostrare che $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+2)^2}$.

Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo quanto voluto:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} + \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{(n+2)^2 - 2n - 3}{(n+1)^2(n+2)^2} =$$

$$= 1 - \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{1}{(n+2)^2}.$$

"Sapienza" Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'Informatica, canale A-D
Primo esonero, a.a. 2008/09 – FILA B

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {{Ø}, 1, {2}, 3, {2, 3}}, B = {Ø , 1, {1, 2}, {2}}.
Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, dove per un insieme I, P(I) indica l'insieme delle parti di I.

A.	$\{Ø\} \in P(A \cap B)$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\{Ø, \{Ø\}\} \subset (A \cup B)$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$\{Ø, 1, 2\} \subset P(B \setminus A)$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$(A \cap B) \in P(B \setminus A)$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \setminus B \neq Ø$. Allora

A.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	B deve essere vuoto	☐ Vero	☐ Falso
C.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	B non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Sia A = {a, b, c, d} e R = {(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,c), (a,c)}:

A. R è una relazione di equivalenza
☐ a. sì.
☐ b. no, perchè non gode della/e proprietà:____
B. la chiusura transitiva di R, R̲
☐ a. è R stessa
☐ b. deve contenere la/e ulteriori coppia/e:____
C. la chiusura transitiva di R, R̲
☐ a. è un ordine largo
☐ b. non è un ordine largo perchè non gode della/e proprietà:__________________________________
D. Le risposte precedenti cambierebbero considerando $R' = R \setminus \Delta_A$?
☐ a. no
☐ b. sì; in particolare ____
(si elenchino le differenze)

4. Sia R una relazione binaria. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se R è un'equivalenza, allora la sua inversa non è di equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
B.	se R è un ordine, allora la sua inversa è un'equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
C.	se l'inversa di R è di equivalenza, allora R non è di equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
D.	se l'inversa di R è un ordine, allora R è di equivalenza	☐ Vero	☐ Falso

5. Siano f e g funzioni totali. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se $f \circ g$ è iniettiva allora g è iniettiva	☐ Vero	☐ Falso
B.	se $g \circ f$ è suriettiva allora g è iniettiva	☐ Vero	☐ Falso
C.	se $f \circ g$ è iniettiva allora g è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
D.	se $g \circ f$ è suriettiva allora f è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri per induzione che $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbf{N}$ che soddisfa questa proprietà.

Soluzioni FILA B:

1. Risposte vere: B

2. Risposte vere: C

3. Risposte:
   - A: b (non gode della proprietà simmetrica)
   - B: a
   - C: a
   - D: b, in particolare
     - A: b (non gode delle proprietà riflessiva e simmetrica)
     - C: b (non gode della proprietà riflessiva)

4. Nessuna risposta vera.

5. Risposte vere: A

6. Applichiamo l'induzione su *n*.

Caso base: se *n*=1 otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $\sum_{k=1}^{1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{2+1}{(2)^2}=\frac{3}{4}$ e $1-\frac{1}{(2)^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Quindi *n*=1 è il minimo n $\in$ **N** che soddisfa questa proprietà.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ è soddisfatta per un qualsiasi valore *n*.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per *n*+1, cioè vogliamo dimostrare che $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+2)^2}$.

Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo quanto voluto:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{(n+2)^2-2n-3}{(n+1)^2(n+2)^2}=$$

$$=1-\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+2)^2}.$$

"Sapienza" Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'Informatica, canale A-D
Primo esonero, a.a. 2008/09 – FILA C

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {Ø , a, {a, b}, {b}}, B = {{Ø}, a, {b}, c, {b, c}}.
Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, dove per un insieme I, P(I) indica l'insieme delle parti di I.

A.	$\{\emptyset, \{a\}\} \subset P(A \setminus B)$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\{a, b\} \subset (A \cup B)$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$\{\emptyset\} \in P(A \setminus B)$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$(A \setminus B) \in P(A \cap B)$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \cap B \neq \emptyset$. Allora

A.	B può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	B può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	A deve essere vuoto	☐ Vero	☐ Falso
D.	A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Sia A = {a, b, c, d} e R = {(a,b), (b,c), (a,c)}:

A. R è una relazione di equivalenza
☐ a. sì
☐ b. no, perchè non gode della/e proprietà:____

B. la chiusura transitiva di R, R
☐ a. è R stessa
☐ b. deve contenere la/e ulteriori coppia/e:____

C. la chiusura transitiva di R, R
☐ a. è un ordine stretto
☐ b. non è un ordine stretto perchè non gode della/e proprietà:______________________________

D. Le risposte precedenti cambierebbero considerando $R' = R \cup \Delta_A$?
☐ a. no
☐ b. sì; in particolare ____
(si elenchino le differenze)

4. Sia R una relazione binaria. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se R è un'equivalenza, allora la sua inversa è di equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
B.	se R è un ordine, allora la sua inversa è un ordine	☐ Vero	☐ Falso
C.	se l'inversa di R è di equivalenza, allora R è di equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
D.	se l'inversa di R è un ordine, allora R è un ordine	☐ Vero	☐ Falso

5. Siano f e g funzioni totali. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se $f \circ g$ è iniettiva allora f è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
B.	se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva	☐ Vero	☐ Falso
C.	se $f \circ g$ è suriettiva allora g è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
D.	se $g \circ f$ è suriettiva allora f è iniettiva	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri per induzione che $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, selezionando come caso base il minimo n ∈ **N** che soddisfa questa proprietà.

Soluzioni FILA C:

1. Risposte vere: C

2. Risposte vere: A,D

3. Risposte:
   A: b (non gode delle proprietà riflessiva e simmetrica)
   B: a
   C: a
   D: b, in particolare
     - A: b (non gode della proprietà simmetrica)
     - C: b (non gode della proprietà antiriflessiva)

4. Tutte le risposte vere.

5. Risposte vere: B

6. Applichiamo l'induzione su *n*.

Caso base: se *n*=1 otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $\sum_{k=1}^{1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{2+1}{(2)^2}=\frac{3}{4}$ e $1-\frac{1}{(2)^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Quindi *n*=1 è il minimo n $\in$ **N** che soddisfa questa proprietà.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ è soddisfatta per un qualsiasi valore *n*.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per *n*+1, cioè vogliamo dimostrare che $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+2)^2}$.

Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo quanto voluto:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{(n+2)^2-2n-3}{(n+1)^2(n+2)^2}=$$

$$=1-\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+2)^2}.$$

"Sapienza" Università di Roma
Corso di Laurea in Informatica
Insegnamento di Metodi matematici per l'Informatica, canale A-D
Primo esonero, a.a. 2008/09 – FILA D

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {{Ø}, 1, {2}, 3, {2, 3}}, B = {Ø , 1, {1, 2}, {2}}.
Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, dove per un insieme I, P(I) indica l'insieme delle parti di I.

A.	$\{Ø\} \in P(B \setminus A)$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\{1, 2\} \subset (A \cup B)$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$\{Ø, \{1\}\} \subset P(B \setminus A)$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$(B \setminus A) \in P(A \cap B)$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \setminus B \neq Ø$. Allora

A.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	B deve essere vuoto	☐ Vero	☐ Falso
D.	B non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Sia A = {a, b, c, d} e R = {(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)}:

A. R è una relazione di equivalenza
☐ a. sì
☐ b. no, perchè non gode della/e proprietà:____

B. la chiusura transitiva di R, <u>R</u>
☐ a. è R stessa
☐ b. deve contenere la/e ulteriori coppia/e:____

C. la chiusura transitiva di R, <u>R</u>
☐ a. è un ordine stretto
☐ b. non è un ordine stretto perchè non gode della/e proprietà:________________________________

D. Le risposte precedenti cambierebbero considerando $R' = R \setminus \Delta_A$?
☐ a. no
☐ b. sì; in particolare ____
(si elenchino le differenze)

4. Sia R una relazione binaria. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se R è un'equivalenza, allora la sua inversa non coincide con R	☐ Vero	☐ Falso
B.	se R è un ordine, allora la sua inversa non coincide con R	☐ Vero	☐ Falso
C.	se l'inversa di R è di equivalenza, allora R è di equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
D.	se l'inversa di R è di equivalenza, allora R è un ordine	☐ Vero	☐ Falso

5. Siano f e g funzioni totali. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se $f \circ g$ è suriettiva allora g è iniettiva	☐ Vero	☐ Falso
B.	se $g \circ f$ è iniettiva allora g è iniettiva	☐ Vero	☐ Falso
C.	se $g \circ f$ è iniettiva allora g è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
D.	se $f \circ g$ è suriettiva allora f è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri per induzione che $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbf{N}$ che soddisfa questa proprietà.

<u>Soluzioni FILA D:</u>

1. Risposte vere: A

2. Risposte vere: A

3. Risposte:
    A: b (non gode delle proprietà riflessiva e simmetrica)
    B: a
    C: b (non gode della proprietà antiriflessiva)
    D: b, in particolare
        - C: a

4. Risposte vere: C

5. Risposte vere: D

6. Applichiamo l'induzione su *n*.

Caso base: se *n*=1 otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $\sum_{k=1}^{1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{2+1}{(2)^2}=\frac{3}{4}$ e $1-\frac{1}{(2)^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Quindi *n*=1 è il minimo n $\in$ **N** che soddisfa questa proprietà.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ è soddisfatta per un qualsiasi valore *n*.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per *n*+1, cioè vogliamo dimostrare che $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+2)^2}$.

Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo quanto voluto:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{(n+2)^2-2n-3}{(n+1)^2(n+2)^2}=$$

$$=1-\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}=1-\frac{1}{(n+2)^2}.$$