Esercitazione scritta di METODI MATEMATICI - Canale A – L
20 - 12 - 2018 (prof. Anna Labella)

A

1. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \wedge B) \to (A \vee B)$$

$\{\neg A\} \vdash \neg B \to (A \to \neg B)$	*Ax 1*
$\{\neg A\} \vdash \neg (A \to \neg B) \to B$	*contr.*
$\vdash \neg A \to (\neg (A \to \neg B) \to B)$	*T.D.*
$\vdash \neg (A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$	*scambio*
$\vdash (A \wedge B) \to (A \vee B)$	*definizione di* $\wedge$ *e* $\vee$

2. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile.

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \to \exists y \forall x\, P(x,y)$$

Il tableau della formula resta aperto.
Quale delle seguenti interpretazioni ne è un modello?

- $D = N \;\; |P| = \{(n, m) \mid n \geq m\}$ ☑
- $D = N \;\; |P| = \{(n, m) \mid n \leq m\}$ ☐
- $D = \{a\} \;\; |P| = \{(a, a)\}$ ☑

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$$

$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, (P(x) \to Q(x))$	*Ass.*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (P(a) \to Q(a))$	*Ax. 4*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash P(a) \to Q(a)$	*MP*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, P(x)$	*Ass.*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, P(x) \to P(a)$	*Ax. 4*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash P(a)$	*MP*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash Q(a)$	*MP*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, \neg Q(x) \to \neg Q(a)$	*Ax. 4*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash Q(a) \to \neg \forall x\, \neg Q(x)$	*contr*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \neg \forall x\, \neg Q(x)$	*MP*
$\{ \forall x\, (P(x) \to Q(x))\} \vdash \forall x\, P(x) \to \neg \forall x\, \neg Q(x)$	*TD*
$\vdash \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \to \neg \forall x\, \neg Q(x))$	*TD*
$\vdash \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$	*def* $\exists$

B

1. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\neg (A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$$

$\{\neg A\} \vdash \neg B \to (A \to \neg B)$	*Ax 1*
$\{\neg A\} \vdash \neg (A \to \neg B) \to B$	*contr.*
$\vdash \neg A \to (\neg (A \to \neg B) \to B)$	*T.D.*
$\vdash \neg (A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$	*scambio*

2. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è falsificabile.

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \to \exists y \forall x\, P(x,y)$$

Il tableau della negata è aperto.
Quale delle seguenti interpretazioni ne è un contromodello?

- $D = N \;\; |P| = \{(n, m) \mid n \geq m\}$ ☐
- $D = N \;\; |P| = \{(n, m) \mid n \leq m\}$ ☑
- $D = \{a\} \;\; |P| = \{(a, a)\}$ ☐

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x))$$

$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, (P(x) \to Q(x))$	*Ass.*
$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (P(a) \to Q(a))$	*Ax. 4*
$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash P(a) \to Q(a)$	*MP*
$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, P(x)$	*Ass.*
$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, P(x) \to P(a)$	*Ax. 4*
$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash P(a)$	*MP*
$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash Q(a)$	*MP*
$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)), (\forall x\, P(x)\} \vdash \forall x\, Q(x)$	*G*
$\{\forall x\, (P(x) \to Q(x))\} \vdash \forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$	*TD*
$\vdash \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x))$	*TD*