“Sapienza” Università di Roma

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento di Metodi matematici per l’Informatica, canale A-D

Esame scritto del 07/09/2009

1. Nome e Cognome ______________________________ **Matricola** ______________

Anno di corso ____________________

☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)**

☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Siano A e B due insiemi. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

☐ **A.** Se $A = \emptyset$ e $f : A \to B$, allora f è iniettiva.

☐ **B.** Se $A = \emptyset$ e $f : A \to B$, allora f non è mai suriettiva.

☐ **C.** Se B ha un solo elemento, allora ogni relazione su $A \times B$ è una funzione.

☐ **D.** Se A ha un solo elemento, allora ogni relazione su $A \times B$ è una funzione.

2. Si dimostri per induzione che la cardinalità dell’insieme delle funzioni da A a B (entrambi fniti) è $\#B^{\#A}$.

---

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$A \to ((\neg B \to \neg A) \to A).$$

4. Sia data la formula

$$(\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y)) \to \exists z (P(z) \wedge Q(z)).$$

Provare mediante il metodo dei tableau semantici che è soddisfacibile. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa?

☐ **A.** $< \{*\}, |P| = |Q| = \{*\} >$.

☐ **B.** $< \mathbb{N}, |P| = \{\text{numeri pari}\}, |Q| = \{\text{numeri dispari}\} >$.

☐ **C.** $< \mathbb{N}, |P| = \{\text{multipli di 2}\}, |Q| = \{\text{multipli di 3}\} >$.

☐ **D.** $< \{*\}, |P| = \emptyset, |Q| = \{*\} >$.

Soluzioni:

1. Risposte vere: A

2. Sia $\#A = n$ e $\#B = m$ ed indichiamo con $\#\mathcal{F}_{A\rightarrow B}$ la cardinalità dell'insieme delle funzioni da A a B. Applichiamo l'induzione su n.

Caso base: se $n = 0$ esiste una sola funzione da $A = \emptyset$ a B, la funzione vuota, quindi $\#\mathcal{F}_{A\rightarrow B} = 1 = m^0 = \#B^{\#A}$.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $\#\mathcal{F}_{A\rightarrow B} = \#B^{\#A}$ dove $\#A = n$ e $\#B = m$, per un qualche valore n fissato.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n + 1$, cioè vogliamo dimostrare che dati gli insiemi A' e B, con $\#A' = \#A + 1 = n + 1$, vale

$$\#\mathcal{F}_{A'\rightarrow B} = m^{n+1} = \#B^{\#A'}.$$

Per l'ipotesi induttiva sappiamo che esistono m^n funzioni da A a B (dove ricordiamo $\#A = n$). Dato che $\#A' = n+1$ e $\#B = m$, l'$(n + 1)$-esimo elemento di A' può essere associato in m modi diversi a un elemento di B. Quindi per ognuna delle m^n funzioni da A a B possiamo ottenere m funzioni da A' a B. Allora $\#\mathcal{F}_{A'\rightarrow B} = m^n \cdot m = m^{n+1} = \#B^{\#A'}$.

3. E' sufficiente notare che la formula $A \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A)$ corrisponde all'Assioma 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, in cui la formula B è costituita da $(\neg B \rightarrow \neg A)$.

4. Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile. Il tableau della formula è il seguente:

$$\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{(\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y))\underline{\rightarrow}\exists z(P(z) \wedge Q(z))} \\
\multicolumn{2}{c}{/} & \backslash \\
\multicolumn{2}{c}{\underline{\neg}(\exists x P(x)\underline{\wedge}\exists y Q(y))} & \underline{\exists z}(P(z) \wedge Q(z)) \\
/ & \backslash & | \\
\underline{\neg}(\underline{\exists x}P(x)) & \underline{\neg}(\underline{\exists y}Q(y)) & P(a)\underline{\wedge}Q(a) \\
| & | & | \\
\neg(\exists x P(x)), \neg P(a) & \neg(\exists y Q(y)), \neg Q(a) & P(a), Q(a)
\end{array}$$

Possiamo notare che tutti i nodi sono aperti (e lo rimarrebbero anche se continuassimo ad estendere il tableau), quindi la formula è soddisfacibile. Comunque sarebbe stato sufficiente mostrare un solo nodo aperto del tableau per affermare che la formula è soddisfacibile.

Risposte vere: A, C, D