INFORMATICA GENERALE - I-Z

Claudia Malvenuto - Daniele A. Gewurz
Scheda esercizi n. 1

1. Sia $f(n) = O(n^2/4 - 5n)$. Dimostrare che $f(n) = O(n)$.

2. È vero che $n^2 = O(n^2/4 - 5n)$?

3. (a) Dimostrare che $8n^4 \neq O(n^3)$.
   (b) Dimostrare che $n^3 \neq \Omega(8n^4)$.

4. Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $n \log n = O(n^{1+\epsilon})$ (cioè un tempo di esecuzione $n \log n$ è strettamente compreso tra n e qualunque potenza di n con esponente maggiore di 1).

5. Dimostrare che, se p è un qualunque polinomi di grado $d \geq 0$, si ha $p(n) = \Theta(n^d)$ (cioè qualsiasi polinomio di grado d "cresce come" n^d).

6. Se p e q sono due polinomi tali che $\deg(p) \leq \deg(q)$, dimostrare che $p(n) = O(q(n))$.

7. **Algebra delle notazioni asintotiche.** Verificare che valgono le seguenti regole, utili per semplificare il calcolo della complessità degli algoritmi:

   - $\forall k, \forall f(n) \geq 0,$
     $f(n) = O(g(n)) \quad \Rightarrow \quad k \cdot f(n) = O(g(n));$
   - $\forall f, d \geq 0,$
     $f = O(g), d = O(h) \quad \Rightarrow \quad f + d = O(g + h) = O(\max(g, h));$
   - $\forall f, d \geq 0,$
     $f = O(g), d = O(h) \quad \Rightarrow \quad fd = O(gh).$

8. Trovare una stima asintotica esatta (cioè un Θ) per $f(n) = 3n \cdot 2^n + 4n^4$.

9. Dimostrare che:

   - ogni logaritmo è strettamente più lento (cioè è un O) di qualunque polinomio;
   - ogni polinomio è strettamente più lento di qualunque esponenziale;
   - ogni esponenziale è strettamente più lento del fattoriale.

   Può essere utile il cosiddetto criterio del rapporto per successioni (che dice che, data una successione $g(n)$ a termini positivi, se $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = k > 1$, allora $\lim_{n\to\infty} g(n) = +\infty$), applicandolo per esempio a $g(n) = a^n/n^b$. Esiste anche una versione del criterio che afferma che se il rapporto di termini consecutivi tende a zero, vi tende anche la successione.

10. È vero che $2^{n+1} = O(2^n)$? È vero che $2^{2n} = O(2^n)$?

11. Svolgere gli esercizi 3-1, 3-2, 3-4 alle pagg. 52/53 del Cormen.

12. Dimostrare che, per $n \geq 1$ e $k \geq 1$, si ha

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1}).$$

13. Sia F_n l'n-mo numero di Fibonacci (con la convenzione per cui $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per $n \geq 3$); siano $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (la *sezione aurea*) e $\hat{\phi} = 1 - \phi$. È noto che si ha:

$$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Dimostrare che $F_n = \Theta(\phi^n)$.