ALCUNE NOTE SUI GRAFI

Tiziana Calamoneri

Un *grafo* $G=(V,E)$ è costituito da una coppia di insiemi, l'insieme finito V di *nodi*, o *vertici*, e l'insieme finito E di coppie non ordinate di nodi, dette *archi*, o *spigoli*. Laddove non sorgono equivoci, gli archi vengono generalmente rappresentati come coppie racchiuse tra parentesi tonde sebbene, essendo coppie non ordinate, sarebbe più corretto racchiuderle tra parentesi graffe. Usualmente, gli interi n ed m indicano il numero di nodi e di archi di cui è composto il grafo. Il numero di archi incidenti ad un certo nodo v è detto *grado di* v.

Un arco (u,v) con $u=v$ è detto *cappio*. Un arco che compare più di una volta in E è detto *arco multiplo*. Un *grafo semplice* non contiene cappi ne' archi multipli.

Un *grafo orientato* è definito in modo analogo al grafo, ma gli archi sono delle coppie ordinate. Dato un *arco orientato* (u,v), esso è un arco *uscente* da u ed *entrante* in v. Nodi senza archi uscenti (rispettivamente, entranti) sono detti *pozzi* (rispettivamente, *sorgenti*). Il *grado entrante* (rispettivamente, *grado uscente*) di un vertice è il numero dei suoi archi entranti (rispettivamente, uscenti).

Teorema: *Dato un grafo non orientato G, la somma dei gradi di tutti i nodi è pari a 2m. Dato un grafo orientato G, la somma dei gradi entranti di tutti i nodi è pari alla somma dei gradi uscenti di tutti i nodi, che è pari ad m.*

Dimostrazione. Contiamo in due modi diversi le coppie (nodo, spigolo) che sono in relazione di incidenza, cioè contiamo in due modi le coppie dell'insieme

$$A=\{(x,e): x\in V, e\in E, x\in e\}.$$

Fissato un nodo $x\in V$, il numero di archi ad esso incidenti è dato dal suo grado. Quindi

$$|A| = \sum_{x\in V} \deg ree(x)\,.$$

Per ogni arco $e\in E$, esistono esattamente due nodi ad esso incidenti. Quindi $|A|=2|E|$.

Il caso orientato si dimostra analogamente. **CVD**

Corollario (detto *Regola della stretta di mano*). *Sia G=(V,E) un grafo finito. Il numero dei nodi di G che hanno grado dispari è pari.*

Dimostrazione. $\sum_{x\in V} \deg ree(x) = \sum_{\substack{x\in V\\ \deg ree(x)\, pari}} \deg ree(x) + \sum_{\substack{x\in V\\ \deg ree(x)\, dispari}} \deg ree(x)$. Ma per il teorema precedente si ha:

$$\sum_{x\in V} \deg ree(x) = 2|E|$$

che è un numero pari. Poiché la somma di un numero pari di dispari è pari, mentre la somma di un numero dispari di dispari è dispari, G deve avere un numero pari di nodi di grado dispari. **CVD**

Sia G un grafo e $x, y \in V(G)$: una *passeggiata* in G da x a y è una sequenza $x_1, e_1, x_2, e_2, \ldots, x_t, e_t, x_{t+1}$ in cui si alternano nodi ed archi del grafo con $x_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$, $x = x_1$, $y = x_{t+1}$ e tale che per $i = 1, \ldots, t$ si abbia $\{x_i, x_{i+1}\} = e_i$. La *lunghezza della passeggiata* è t, ovvero il numero dei suoi archi (con eventuali ripetizioni).

Un *cammino* da x a y è una passeggiata da x a y in cui non ci siano ripetizioni di archi: se $i\neq j$ allora $e_i\neq e_j$. Un cammino in cui primo e ultimo nodo coincidono si chiama *circuito*. Un *cammino semplice* è un cammino in cui non ci siano ripetizioni di nodi: se $i\neq j$ allora $x_i\neq x_j$, ad eccezione al più di 1 e $t+1$; nel caso in cui $x_1=x_{t+1}$ il cammino semplice si chiama *ciclo*.

Si dice che x è *raggiungibile* da y se $y = x$ oppure se esiste una passeggiata da x a y. La relazione di raggiungibilità tra nodi ha la proprietà riflessiva per definizione perché x è raggiungibile da x. La relazione è simmetrica perché se $x_1, e_1, x_2, e_2, \ldots, x_t, e_t, x_{t+1}$ è una passeggiata da x ad y, allora $x_{t+1}, e_t, x_t, \ldots, x_2, e_1, x_1$ è una passeggiata da y ad x. Inoltre la relazione di raggiungibilità è anche transitiva: se c’è una passeggiata da x a y e una passeggiata da y a z, allora z è raggiungibile da x attraverso la passeggiata che si ottiene incollando le precedenti passeggiate in y. Si tratta perciò di una relazione di equivalenza: le classi di questa relazione di equivalenza determinano una partizione dei nodi. Tutti i nodi di una stessa classe sono raggiungibili da ogni altro nodo di questa classe. Un grafo in cui la partizione in questione ha una sola classe si chiama *connesso*. Se il grafo non è connesso, ogni classe della partizione induce un sottografo chiamato *componente connessa*. Non è restrittivo supporre che i grafi considerati siano connessi: se così non fosse, si potrebbero considerare tutte le loro componenti connesse.

Proposizione. *Se in G esiste una passeggiata da x a y allora esiste un cammino semplice da x a y.*

Dimostrazione. Se nella passeggiata $x = x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, x_t, e_t, x_{t+1} = y$ esistono indici $i \neq j$ tali che $x_i = x_j = z$, allora sia i' il più piccolo indice per cui $z = x_{i'}$, e sia j' l’indice più grande per cui $z = x_{j'}$. Sostituendo la sezione della passeggiata $x_{i'}, e_{i'}, x_{i'+1}, \dots, x_{j'}$ con il solo nodo z si ottiene una nuova passeggiata, visto che in questa nuova sequenza ogni arco presente ha gli stessi vicini di prima. D’altronde in questa passeggiata il nodo z non è più ripetuto. Iterando questa procedura con gli altri nodi ripetuti presenti, si arriva ad un cammino semplice. **CVD**

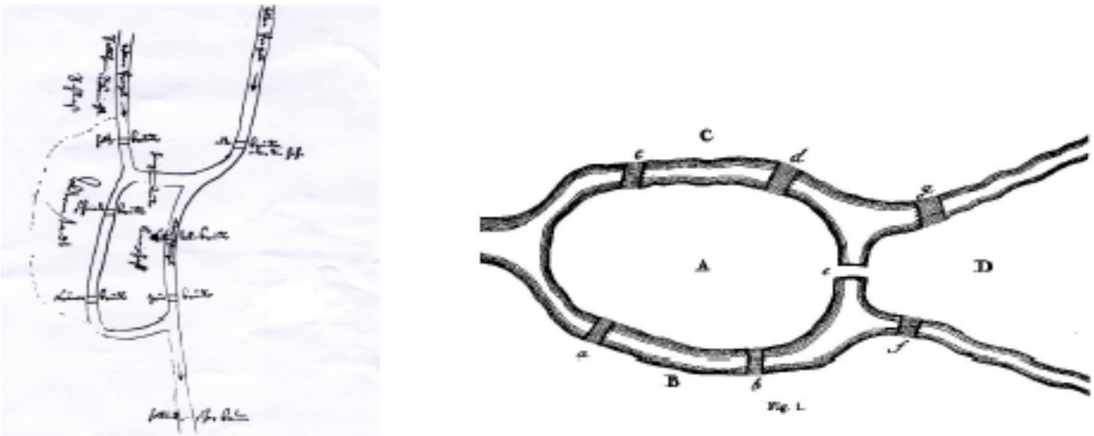
Esercizio: Modificare un algoritmo di visita in modo tale che, dato in input un grafo, restituisca il numero delle sue componenti connesse.

Idea di soluzione: Supponiamo che inizialmente tutti i nodi del grafo siano marcati con l'indice 0, non corrispondente ad alcuna componente, e procediamo nel seguente modo:

1. per ogni nodo u del grafo il cui indice di componente connessa è uguale a 0
2. incrementa l'indice di componente connessa numcomp
3. effettua una visita DFS(G, u, numcomp) per marcare ogni nodo del sottografo a cui u appartiene con l'indice numcomp.

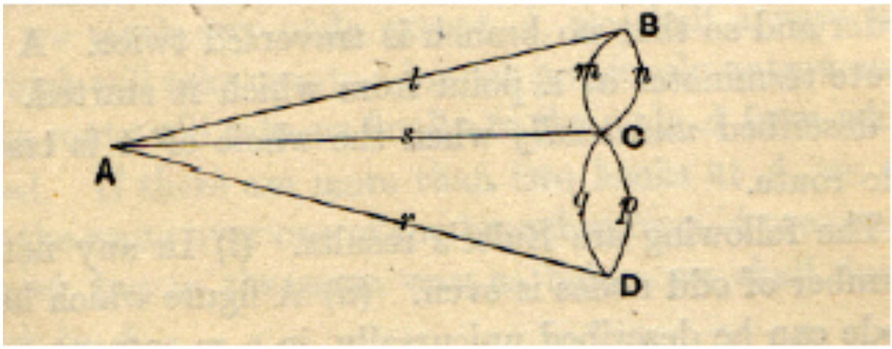
La nascita della moderna teoria dei grafi si fa risalire al famoso articolo di Eulero del 1736 sul problema dei ponti di Königsberg. Il problema consiste nel fare un giro a piedi della cittadina passando una ed una sola volta attraverso ciascun ponte e ritornando al punto di partenza. Nel suo articolo, Eulero risolve il suo problema passando dallo specifico problema dei ponti di Königsberg al problema generale su qualunque grafo ponendo così le basi della teoria dei grafi. E’ curioso osservare che egli non utilizza mai la visualizzazione dei grafi per spiegare i suoi risultati: nel suo lavoro, gli unici disegni rappresentano la mappa di Königsberg (figura 1). Una spiegazione a questa assenza di interesse per la visualizzazione di grafi può essere trovata nel primo paragrafo del suo articolo, in cui Eulero richiama la visione di Leibnitz di un nuovo tipo di geometria senza misure o grandezze. In effetti, Leibnitz sottolinea l’utilità di una nuova caratteristica, completamente diversa dall’algebra, che trae molto vantaggio da una rappresentazione mentale molto naturale, ma *senza figure*. Eulero ha familiarità con il pensiero di Leibnitz, il quale ribadisce che ne’ figure ne’ modelli dovrebbero legare l’immaginazione. Eulero è dunque un convinto oppositore della visualizzazione dei grafi per descrivere o risolvere problemi di teoria dei grafi.

Figura 1.



Dunque, probabilmente, è solo 150 anni fa che appare la prima raffigurazione di grafo astratto che rappresenta il problema dei ponti di Königsberg (figura 2), ad opera di W.W. Rouse Ball (1850-1925), e il suo disegno appare in un libro sugli svaghi matematici: le varie zone della cittadina sono rappresentate da nodi ed i ponti sono rappresentati da archi, che collegano opportunamente coppie di zone.

Figura 2.



Vediamo le considerazioni di Eulero riguardo questo problema.

Definizione: Un *circuito euleriano* è un cammino che tocca tutti gli archi una e una sola volta tornando al punto di partenza. Un grafo G si dice *grafo euleriano* se ammette un circuito euleriano.

Teorema (di Eulero)**.** *Un grafo $G=(V,E)$ connesso è euleriano se e solo se tutti i suoi nodi hanno grado pari.*

Dimostrazione. Condizione necessaria: Sia G euleriano. Allora, per definizione esiste un circuito euleriano C che attraversa una e una sola volta tutti gli archi del grafo. Il circuito C tocca tutti i nodi di G. Inoltre C entra ed esce in ogni vertice (tranne che per il primo ed ultimo nodo da cui esce all'inizio e in cui entra alla fine) senza mai passare due volte sullo stesso arco. Quindi tutti i nodi devono avere necessariamente grado pari.

Condizione Sufficiente: Per ipotesi, ogni nodo di G ha grado pari. Costruiamo un circuito euleriano. Sia x un nodo di G. Usciamo da x attraverso un arco, entrando in un altro nodo y di G. Poiché y ha grado pari, possiamo uscire da y con un arco diverso da quello con cui siamo entrati. Possiamo ripetere il procedimento senza passare mai due volte su uno stesso arco e, poiché il grafo è finito, prima o poi torneremo sul nodo x. Abbiamo così costruito un ciclo, che non è necessariamente euleriano, perché potremmo non aver attraversato tutti gli archi del grafo. Allora consideriamo il grafo G' ottenuto da G cancellando gli archi del ciclo. Se tutti i nodi di G' hanno grado 0 allora il ciclo costruito è euleriano. Altrimenti consideriamo un nodo x' appartenente al ciclo rimosso che abbia ancora grado positivo. Tale nodo deve esistere perché G è connesso. Ripetiamo il procedimento sul grafo G' a partire da x'. Otteniamo un nuovo ciclo, che interseca il precedente nel nodo x'. L'unione dei due cicli è essa stessa un ciclo. Iterando il procedimento, prima o poi tutti gli archi del grafo verranno usati, ottenendo così un ciclo euleriano. **CVD**

Esercizio: scrivere un algoritmo che, dato un grafo, verifichi se esso è euleriano oppure no. Progettare l'algoritmo sia se il grafo è dato con liste di adiacenza sia se è dato con matrice di adiacenza sia se è dato con matrice di incidenza. Per ognuno fornire la complessità.

Parliamo ora di alcune nozioni e proprietà che riguardano i grafi.

Definizione. Un grafo si dice *bipartito* se l'insieme dei vertici si può ripartire in due sottoinsiemi disgiunti V_1 e V_2 in modo che gli archi uniscano un vertice di V_1 con uno di V_2.

Teorema: Un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli dispari.

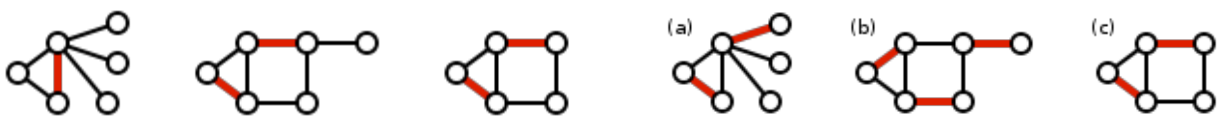
Dimostrazione: (<=) Sia $G=(V,E)$ un grafo senza cicli dispari, e mostriamo che esso è bipartito. Ovviamente, un grafo è bipartito se tutte le sue componenti connesse sono grafi bipartiti oppure grafi banali (composti da un unico nodo), quindi non è restrittivo assumere che G sia connesso. Sia T un albero ricoprente di G, e consideriamo la sua radice r. Per ogni vertice v del grafo, esiste in T un unico cammino da v ad r. Partizioniamo i nodi di G a seconda che la loro distanza da r sia pari o dispari, e dimostriamo che G è bipartito secondo tale partizione. Per fare ciò dimostriamo che, comunque si scelga un arco del grafo, i suoi estremi giacciono in partizioni differenti. Sia $e=(x,y)$ un arco di G; se e è un arco di T, allora non è restrittivo assumere che x sia il padre di y, e quindi x appartiene al cammino che va da y ad r e, più precisamente, precede y nel cammino; quindi x ed y stanno in partizioni differenti. Infine, sia $e=(x,y)$ un arco di G ma non di T; allora, il cammino da r ad x su T, il cammino da r ad y su T, e l'arco e formano un ciclo C; tale ciclo è pari per ipotesi, pertanto deve necessariamente essere che uno tra i due cammini da r ad x e ad y sia pari, mentre l'altro sia dispari, cioè x ed y stanno in partizioni differenti.

(=>) Sia $G=(V,E)$ bipartito, pertanto $V=V_1 \cup V_2$. Consideriamo un ciclo di G; esso passa per un qualche nodo v in V_1, ed il nodo w che segue v nel ciclo deve necessariamente appartenere a V_2, per l'ipotesi che il grafo è bipartito; tale ragionamento può essere iterato, pertanto il nodo u successivo a w nel ciclo appartiene a V_1, il nodo x successivo ad u nel ciclo appartiene a V_2, e così via. Il ragionamento viene iterato fino a quando, seguendo in ordine i nodi del ciclo, non si torna al nodo di partenza v. Essendo stati costretti a passare da una partizione all'altra ad ogni passo, il ciclo non può che essere pari. **CVD**

Esercizio: modificare un algoritmo di visita in modo che, dato un grafo, esso restituisca se il grafo è bipartito o no.
Idea di soluzione: Utilizzare il metodo della dimostrazione del teroema precedente.

Definizione. In un grafo, un *accoppiamento* (*matching*) M è un sottoinsieme di archi disgiunti, cioè senza estremi in comune.

Di solito, dato un grafo, si cerca un accoppiamento di massima cardinalità. Poiché non sembrano esistere algoritmi semplici per risolvere questo problema, ci si accontenta a volte di determinare un accoppiamento massimale, anziché massimo. In figura sono riportati a sinistra degli accoppiamenti massimali di tre grafi, mentre a destra degli accoppiamenti massimi degli stessi grafi.



Esercizio: modificare un algoritmo di visita in modo che, dato un grafo, esso restituisca un accoppiamento massimale.
Idea di soluzione: Utilizzare una visita in profondità e dimostrare che ogni arco non può accrescere l'accoppiamento trovato, sfruttando le proprietà dell'albero di visita in profondità.

Particolare interesse in letteratura ha l'accoppiamento di grafi bipartiti.

Definizione. Dato un grafo bipartito $G=(V_1 \cup V_2, E)$, un suo accoppiamento M si dice *completo* se $|M|=|V_1|$, dove V_1 è l'insieme con cardinalità minore tra i due in cui è stato partizionato l'insieme dei nodi V.

Teorema (di Philip Hall). *Sia $G=(V_1,V_2,E)$ un grafo bipartito con $|V_1| \leq |V_2|$. Allora G ha un accoppiamento completo tra V_1 e V_2 se e solo se per ogni insieme S di k nodi di V_1 vi sono almeno k nodi di V_2 adiacenti ad uno dei nodi di S.*

Sia adj(S) l'insieme dei nodi di V_2 adiacenti a qualche nodo di S, cioè adj(S) = $\{v \in V_2 : \exists u \in S, (u,v) \in E\}$, allora la condizione di Hall diventa: $|S| \leq |adj(S)|$ per ogni $S \subseteq V_1$.

Dimostrazione. Condizione necessaria: Se G ha un accoppiamento completo M ed S è un qualsiasi sottoinsieme di V_1, allora ogni vertice in S è accoppiato da M con un differente nodo in $N(S)$, tale che $|S| \leq |adj(S)|$.

Condizione sufficiente: Per assurdo, sia verificata la condizione di Hall, ma non esista un accoppiamento completo, cioè sia M un accoppiamento massimo, con $|M|<|V_1|$; dimostriamo che esiste un accoppiamento M' con $|M'|=|M|+1$. L'idea della dimostrazione è costruire un cammino i cui nodi siano alternativamente in M e fuori di M.

Diremo, per abuso di linguaggio, che un nodo appartiene ad M se è estremo di un arco di M. Per ipotesi, $|M|<|V_1|$, e dunque esiste un $u_0 \in V_1$, tale che $u_0 \notin M$. Sia $S = \{u_0\}$; per tale insieme vale che $1= |S| \leq |adj(S)|$ per ipotesi, e quindi esiste un nodo $v_1 \in V_2$ adiacente ad u_0. Se $v_1 \notin M$, allora $M' = M \cup \{e\}$, dove $e = (u_0,v_1)$, è l'accoppiamento richiesto. Quindi $v_1 \in M$, per qualche $u_1 \in V_1$, allora prendendo $S=\{u_0,u_1\}$ si ha $2= |S| \leq |adj(S)|$, e deve esistere un altro nodo v_2, distinto da v_1, e adiacente ad u_0 o ad u_1. Se $v_2 \notin M$, si hanno due possibilità:

- v_2 adiacente ad u_1. Consideriamo il cammino v_2,u_1,v_1,u_0, nel quale l'arco $e=(u_1,v_1)$ sta in M, mentre $f=(u_1,v_2)$ e $g=(u_0,v_1)$ no. Formiamo allora il nuovo accoppiamento M' aggiungendo a M gli archi f e g e togliendo e. M' ha un arco in più di M.
- v_2 adiacente ad u_0. Formiamo il nuovo accoppiamento M' aggiungendo ad M l'arco (u_0,v_2). Anche qui M' ha un arco in più di M.

Allora deve risultare $v_2 \in M$; v_2 è adiacente ad u_0 o ad u_1 con un arco che non sta nell'accoppiamento (in quanto $u_0 \notin M$ ed $u_1 \in M$ e u_1 è accoppiato con v_1), ma poiché sta in M deve stare su un arco di M. Dunque esiste $u_2 \in M$, $u_2 \neq u_0,u_1$, adiacente a v_2. Prendiamo S={ u_0, u_1, u_2}. Avendosi $|\{u_0, u_1, u_2\}| = 3$ esiste un terzo vertice $v_3 \in V_2$ adiacente ad uno dei tre. Sia $v_3 \notin M$. Vi sono 3 casi:

- v_3 adiacente ad u_2. Nel cammino v_3,u_2,v_2,u_0 l'arco (u_2,v_2) appartiene all'accoppiamento M, gli altri due no. Si ottiene un nuovo accoppiamento M'' togliendo ad M l'arco (u_2,v_2) e aggiungendo gli altri due, e si ha $|M'|=|M| + 1$.
- v_3 adiacente ad u_1. Nel cammino v_3,u_1,v_1,u_0, cambiando stato al primo e al terzo arco si ottiene $|M'|=|M| + 1$.
- v_3 adiacente ad u_0. Nel cammino v_3,u_0,v_1,u_1 si proceda come nei casi precedenti cambiando stato a (v_3,u_0).

Continuando in questo modo, per la finitezza del grafo, si arriva necessariamente ad un nodo v_r che non appartiene ad M. Ognuno dei nodi v_i è adiacente ad almeno uno tra $u_0,u_1,\ldots,u_{i-1}$. Come nel caso $r = 2$ si ha un cammino $v_r,u_s,v_s,u_t,v_t,\ldots,v_m,u_0$, nel quale glia archi $e_i=(u_i,v_i)$ appartengono ad M, mentre gli $e_j = (v_j,u_j)$ no. Costruiamo allora un nuovo accoppiamento M' togliendo da M gli e_i e aggiungendo gli e_j. Poiché i due archi esterni (v_r,u_s) e (v_m,u_0) sono in M', questo accoppiamento contiene un arco in più di M. **CVD**

Corollario. *Sia $G=(V_1, V_2, E)$ un grafo bipartito k-regolare con $|V_1|=|V_2|$. Allora G contiene k accoppiamenti completi.*

Dimostrazione. Sia S un sottinsieme di V_1. L'insieme *adj(S)* avrà al più $k|S|$ nodi (se ciascun nodo in *adj(S)* ha grado 1 nel sottografo indotto da $S \cup adj(S)$) ed almeno $|S|$ nodi (se ciascun nodo in *adj(S)* ha grado k nel sottografo indotto da $S \cup adj(S)$). In tutti i casi la condizione di Hall è verificata, e quindi esiste un accoppiamento completo, che può essere rimosso dal grafo dando luogo ad un nuovo grafo *(k-1)*-regolare. Per esso possiamo ripetere il ragionamento, giungendo all'asserto. **CVD**

Concludiamo queste brevi note sui grafi con qualche cenno a quello che è forse il problema su grafi più famoso: il problema della colorazione.

Definizione. Dato un grafo *G*, esso è *k-colorabile* se ad ognuno dei suoi nodi è possibile assegnare uno di *k* colori (interi da 1 a *k*) in modo tale che due nodi adiacenti qualsiasi non abbiano lo stesso colore. Se *G* è *k*-colorabile ma non *(k-1)*-colorabile, diciamo che *k* è il numero cromatico di *G*, indicato con $\chi(G)$.

E' facile vedere che se il grafo è il completo su *n* nodi, il suo numero cromatico è $\chi(G)=n$, perciò è possibile costruire grafi con numero cromatico arbitrariamente grande. Invece, $\chi(G)=1$ se e solo se *G* è un grafo che non contiene archi, cioè è un grafo nullo. Infine, $\chi(G)=2$ se e solo se *G* è un grafo bipartito, e la sua bipartizione corrisponde ai nodi che possono essere colorati con ciascuno dei due colori; pertanto *G* ha numero cromatico 2 se e solo se non contiene cicli dispari. E' interessante notare che gli alberi sono grafi con numero cromatico uguale a 2.

Sfortunatamente, possiamo dire poco a riguardo del numero cromatico di un grafo arbitrario; se il grafo ha *n* nodi allora ovviamente $\chi(G)\leq n$, e se il grafo contiene come sottografo un grafo completo di *r* nodi, allora $\chi(G)\geq r$, ma queste limitazioni possono essere arbitrariamente lontane.

Teorema. *Se G è un grafo il cui grado massimo di un nodo è d, allora G è (d+1)-colorabile.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero *n* di nodi di *G*.

L'affermazione è bnalmente vera se $n=1$, poiché il grafo non ha archi e basta un colore.

Sia *G* un grafo con *n* nodi; se rimuoviamo da esso uno dei suoi nodi con tutti i suoi archi incidenti otteniamo un grafo con $n-1$ nodi che, per ipotesi induttiva, può essere $(d+1)$-colorato. Riaggiungendo al grafo il nodo precedentemente tolto, esso ha al più *d* vicini colorati con al più *d* colori diversi. Pertanto esiste sempre un ulteriore colore non usato con cui il nodo può essere colorato. **CVD**

Esercizio. Dato un grafo G di massimo grado *d* memorizzato tramite liste di adiacenza, progettare un algoritmo che ne dia una sua $(d+1)$-colorazione. Calcolare la complessità computazionale dell'algoritmo proposto.

Idea di soluzione: Si doti ogni nodo di un vettore di lunghezza $d+1$ in cui vengono memorizzati i colori "proibiti" per quel nodo perché già usati da suoi vicini, si scorrano le liste di adiacenza in ordine dando ad ogni nodo il primo colore disponibile.

Con un'analisi più approfondita questo teorema può essere rafforzato nel seguente risultato:

Teorema. *(di Brooks) Se G è un grafo di massimo grado d, allora G è d-colorabile a meno che non si verifichi una delle seguenti condizioni:*

(i) *G ha il grafo completo con d+1 nodi come componente connessa*

(ii) *d=2 e G ha un ciclo di lunghezza dispari come componente.*

Questi due teoremi sono utili se i gradi dei nodi sono approssimativamente uguali; d'altra parte, se il nostro grafo ha pochi nodi di grado alto, allora questi teoremi ci dicono poco: si pensi alla stella (un nodo connesso a *k* nodi di grado 1), che per il teorema di Brooks è *k*-colorabile, ma che in effetti è bipartito, quindi 2-colorabile.

Questa discrepanza tra limitazione superiore e numero cromatico effettivo è molto ridotta se restringiamo la nostra attenzione ai grafi planari.

Definizione. Un *grafo planare* è un grafo che può essere disegnato sul piano in modo che due archi qualsiasi (o meglio, le curve che li rappresentano) non si incrocino mai eccetto che in un nodo al quale siano entrambi incidenti.

In un grafo planare, oltre ai nodi e agli archi, rimangono individuate le *facce*, definite come segue.

Definizione. Un punto del piano x si dice *disgiunto da grafo planare G* se x non rappresenta né un nodo né un punto che giace su un arco di G. Dato un punto x disgiunto da G, definiamo la *faccia di G contenente x* come l'insieme dei punti disgiunti da G che possono essere raggiunti da x con una curva di Jordan i cui punti sono tutti disgiunti da G.

In alternativa, possiamo dire che due punti del piano x ed y sono in relazione se sono entrambi disgiunti da G e possono essere congiunti da una curva di Jordan i cui punti siano tutti disgiunti da G; questa è una relazione di equivalenza sui punti del piano disgiunti da G, e le corrispondenti classi di equivalenza sono chiamate *facce di G*.

Esattamente una delle facce di ogni grafo planare è illimitata, detta *faccia infinita*. In effetti la faccia infinita non ha niente di speciale rispetto alle altre facce; per convincersi di ciò è sufficiente riportare il disegno del grafo sulla superficie di una sfera e riproiettare il grafo sul piano tangente alla sfera nel polo sud da un altro punto: la faccia che contiene il punto di proiezione diventerà la faccia infinita.

Teorema. *(di Eulero) Sia G un grafo planare connesso con n nodi, m archi ed f facce. Allora:*

$$n+f=m+2.$$

Dimostrazione. Si proceda per induzione sul numero degli archi m.

Se $m=0$, allora $n=1$ (perché G è connesso) ed $f=1$ (l'unica faccia è quella infinita), e quindi l'asserto è vero.

Supponiamo ora il teorema vero se G ha $m-1$ archi ed aggiungiamo un nuovo arco a G. Due possibilità possono verificarsi: (i) se il numero dei nodi rimane immutato l'aggiunta di questo arco non può che portare allo spezzamento di una faccia in due nuove facce; (ii) se il numero dei nodi aumenta di 1, l'arco connette un nodo preesistente al nuovo nodo e il numero delle facce rimane immutato.

Detto G' il nuovo grafo, con n' nodi, m' archi ed f' facce, e ricordando che $m'=m+1$, si ha:

nel caso (i): $n'=n$ ed $f'=f+1$, perciò: $n'+f'=n+f+1=m+2+1=m'+2;$

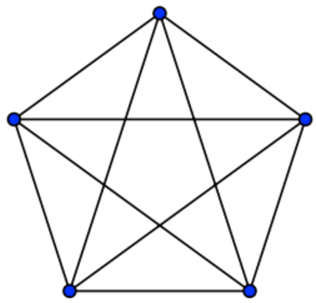
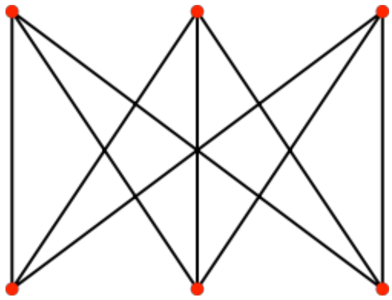
nel caso (ii): $n'=n+1$ ed $f'=f$, perciò: $n'+f'=n+1+f=m+2+1=m'+2.$

In entrambi i casi il teorema è dimostrato. **CVD**

Corollario. *Se G è un grafo planare connesso con n nodi ed m archi, $n\geq 3$, allora $m\leq 3n-6$. Se G è anche bipartito, allora $m\leq 2n-4$.*

Dimostrazione. Poiché ogni faccia di G è limitata da almeno 3 spigoli $3f\leq 2m$. Combinando questa disuguaglianza con il teorema di Eulero si ha il risultato. La disuguaglianza sui bipartiti si ottiene nello stesso modo ricordando che essi non contengono cicli dispari e quindi ogni faccia è limitata da almeno 4 archi. **CVD**

Corollario. I grafi K_5 e $K_{3,3}$ (rappresentati in figura) sono non planari.

Dimostrazione. Se per assurdo i due grafi fossero planari per essi dovrebbe valere il teorema di Eulero ed il suo corollario, mentre applicando le disuguaglianze del corollario precedente a K_5 si ottiene la relazione assurda $10 \leq 9$. Applicando la disuguaglianza $4f \leq 2m$ a $K_{3,3}$ si ha $2f \leq 9$ mentre il teorema di Eulero ci dice che $f=5$. **CVD**

Tornando alla colorazione dei grafi, nel caso dei grafi planari, è possibile enunciare come teorema un risultato che per molti anni è stato una congettura:

Teorema. *(dei 4 colori) Ogni grafo planare è 4-colorabile.*