

INFORMATICA GENERALE

Homework 1/2018: Mediane, Successioni, Ordini

IVANO SALVO – Sapienza Università di Roma – 20/4/2018

Esercizio 1. Considerate il problema di determinare la *mediana* in un vettore di interi. Per comodità, considereremo una piccola generalizzazione: dato un vettore v di n elementi e un intero $0 < k < n$ chiamiamo k -*mediana* l'elemento del vettore v_i tale che l'insieme $\{v_j \mid v_j \leq v_i, 0 \leq j < n\}$ abbia cardinalità esattamente k (osservate che per come abbiamo definito la k -mediana, non ha senso per $k = 0$).

Nel caso in cui ci siano elementi ripetuti, c'è una piccola difficoltà in quanto potrebbe accadere che non esista nessun elemento v_i per cui l'insieme sopra scritto abbia esattamente cardinalità k : in tal caso la risposta deve essere il minimo v_i tale che $\{v_j \mid v_j \leq v_i, 0 \leq j < n\}$ ha cardinalità maggiore di k .

Scrivere una funzione C di prototipo:

```
int selectKth(int v[], int n, int k)
/* PREC: 0<k<n */
```

che ricevendo un vettore v , la sua lunghezza n e un numero k restituisce il valore della k -mediana di v .

Chi lo desidera, potrà piangere sull'inchiostro versato, rimuginando sul compito dell'esonero, visto che questo esercizio ammette soluzioni simili al problema del minimo intero libero, inclusa una basata su *divide-et-impera*.

ESEMPIO: Se $n = 7$, $v = \{1, 4, 2, 11, 11, 7, 42\}$ e $k = 3$, la funzione dovrà rispondere 4. Nel caso k fosse 5 o 6, la funzione dovrà rispondere 11 (osservate che in questo caso i numeri minori o uguali a 11 sono 6 in v , ma 11 è ripetuto).

Esercizio 2. Considerate la sequenza di numeri naturali definita come segue: $y_n = n$ per $0 \leq n \leq 3^1$. Per $n > 3$, y_n è il minimo numero intero diverso

¹definiamo la successione su 0 per "riempire" il vettore del C in posizione 0. Usualmente queste successioni in Matematica vengono fatte partire dall'indice 1.

da $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ tale che y_n è co-primo con y_{n-1} (cioè $\text{mcd}(y_n, y_{n-1}) = 1$) ed ha un fattore comune con y_{n-2} , (cioè $\text{mcd}(y_n, y_{n-1}) > 1$). Essa definisce la sequenza di interi: 0, 1, 2, 3, 4, 9, 8, 15, 14, 5, 6, 25, 12, 35, 16, 7, 10, 21, 20, 27, 22, 39, 11, 13, ... I perdigiorno posso provare a dimostrare che si tratta di una biiezione da \mathbb{N} in \mathbb{N} . Voi dovete scrivere una funzione C di prototipo:

```
int* yellowstone(int n)
/* PREC: n>3 */
```

che alloca un vettore di lunghezza n e lo carica con gli elementi y_0, y_1, \dots, y_{n-1} .

Esercizio 3. Un vettore *ordinato* di (almeno) $n + 1$ interi rappresenta un insieme di interi $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. L'indice 0 del vettore viene utilizzato per memorizzare la cardinalità dell'insieme. Considerate ora il seguente ordine totale \prec su $\mathcal{P}(A)$: $X \prec Y$ ($X, Y \subseteq A$) se $\max X < \max Y$ oppure se $\max X = \max Y$ e $X \setminus \{\max(X)\} \prec Y \setminus \{\max(Y)\}$ (con $\max \emptyset = -\infty$).

Pare un po' difficile, ma ad esempio, se $A = \{1, 4, 7\}$, allora $\mathcal{P}(A)$ è ordinato come segue: $\emptyset \prec \{1\} \prec \{4\} \prec \{1, 4\} \prec \{7\} \prec \{1, 7\} \prec \{4, 7\} \prec \{1, 4, 7\}$. L'insieme A viene rappresentato con il vettore $\mathbf{a}=\{3, 1, 4, 7\}$, mentre l'insieme $\{1, 7\}$ con il vettore $\mathbf{a}=\{2, 1, 7, \#\}$, dove la wildcard $\#$ è semplicemente una notazione per indicare che quell'elemento del vettore non è rilevante. Grazie alla cardinalità 2 memorizzata in posizione 0, non andrò mai a vedere a_3 .

Scrivere una funzione C di prototipo:

```
int* kthSubSet(int v[], int k)
/* PREC: 0<=k<=2^v[0]-1 */
```

che alloca un vettore della stessa lunghezza v (che rappresenta un insieme A e quindi v_0 contiene il numero di elementi di A) che rappresenti il k -esimo insieme nell'ordine totale definito su $\mathcal{P}(A)$ (con \emptyset considerato 0-esimo elemento).

ESEMPIO: Se il vettore \mathbf{v} rappresenta l'insieme A come sopra, e $k = 0$, allora occorre rispondere con una rappresentazione dell'insieme vuoto che è un qualsiasi vettore tale che $v_0 = 0$ (cioè $\{0, \#, \#, \#\}$ usando le notazioni viste sopra). Se $k = 3$, allora dovrò caricare un vettore che rappresenti $\{1, 4\}$, cioè $\{2, 1, 4, \#\}$ e così via fino a $k = 7$, che è ovviamente A stesso, e cioè il vettore $\{3, 1, 4, 7\}$.

Note Pratiche: vedi note pratiche dell'Homework di Prova. In questo homework (esercizi 2 e 3), i vostri sorgenti C dovranno includere librerie standard per allocare memoria, e cioè cominciare con `#include<stdlib.h>`.