Informatica Generale
Homework 2: (Le) Relazioni (Pericolose)...

docente: Ivano Salvo
Sapienza Università di Roma

pubblicazione: 12.V.2016 - consegna 24.V.2016

Una relazione binaria R su un insieme A è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times A$. Conveniamo di di scrivere, come sempre, $R(x, y)$ per indicare che la coppia (x, y) è nella relazione R, cioè $(x, y) \in R$.

Una matrice quadrata di interi `R` di dimensione $n \times n$ contenente $0, 1$, può rappresentare una *relazione binaria* R su un insieme finito di n elementi $A = \{a_0, \dots a_{n-1}\}$ stipulando che `R[i][j]=1` se e solo se $R(a_i, a_j)$ vale.

Nel seguito, tutti gli esercizi leggeranno in input un numero intero n e poi $n \times n$ interi (che in realtà saranno solo 0 e 1).

Esercizio 1: Scrivere un programma C che letta una matrice come sopra descritto, stampi 1 se la relazione è transitiva, 0 altrimenti. Ricordiamo che R è transitiva se $\forall x, y, z. R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$.

Dovete quindi controllare, per tutte le terne di indici , se, ogni qualvolta nella matrice di input si abbia `R[i][j]=1` e `R[j][k]=1` allora anche `R[i][k]=1`.

Esempio: Consideriamo le seguenti matrici:

```
1   1   1   1                                   0   1   0   0
1   1   1   1                                   1   0   1   1
0   0   0   0                                   0   0   0   0
0   0   1   0                                   0   0   1   0
```

Nel caso a sinistra la risposta è 1 (spero ☺). Nel caso a destra, la risposta è 0. Infatti ad esempio ho $R(a_0, a_1)$ e $R(a_1, a_2)$ ma non $R(a_0, a_2)$.

Esercizio 2: Data una relazione $R \subseteq A \times A$, definiamo la composizione come la relazione $R \circ R$ tale che, per ogni i, j $(R \circ R)(a_i, a_j)$ se e solo se $\exists k. R(a_i, a_k) \wedge R(a_k, a_j)$.

Scrivere un programma C che letta una matrice come sopra descritto che rappresenta la relazione R, stampi la matrice che rappresenta $R \circ R$.

Esempio: Ricevendo in input le matrice di destra nell'esempio dell'Esercizio 1, l'output deve essere:

```
1  0  1  1
0  1  1  0
0  0  0  0
0  0  0  0
```

Esercizio 3: Supponiamo che una relazione R, rappresenti una nozione di raggiungibilità in un passo. Definiamo ora, usando R, una nozione di distanza $d : A \times A \mapsto \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tale che, per ogni coppia di elementi, $d(a_i, a_j)$ sia il minimo numero di passi, in accordo con R, che consentono di andare da a_i ad a_j. Conveniamo inoltre che ogni elemento disti 0 da sè stesso, e che la distanza sia ∞ se non c'è modo di andare da un elemento all'altro. Formalmente:

$$d(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } R(a_i, a_j) \\ n+1 & \text{se } [\exists k.R(a_i, a_k) \ \wedge \ d(a_k, a_j) = n] \wedge [\forall k.R(a_i, a_k) \Rightarrow d(a_k, a_j) \geq n] \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Scrivere una funzione C letta una matrice come sopra descritto, stampi la matrice $n \times n$ delle minime distanze. Stampare -1 in posizione i, j se $d(a_i, a_j) = \infty$.

Esempio: Considerando ancora le matrici dell'Esercizio 1, l'output deve essere rispettivamente:

```
 0   1   1   1          0   1   2   2
 1   0   1   1          1   0   1   1
-1  -1   0  -1         -1  -1   0  -1
-1  -1   1   0         -1  -1   1   0
```

Suggerimento: iterare il calcolo delle distanze, costruendo una nuova matrice, assicurandosi, ad ogni iterazione j, di aver correttamente calcolate tutte le minime distanze al più j.