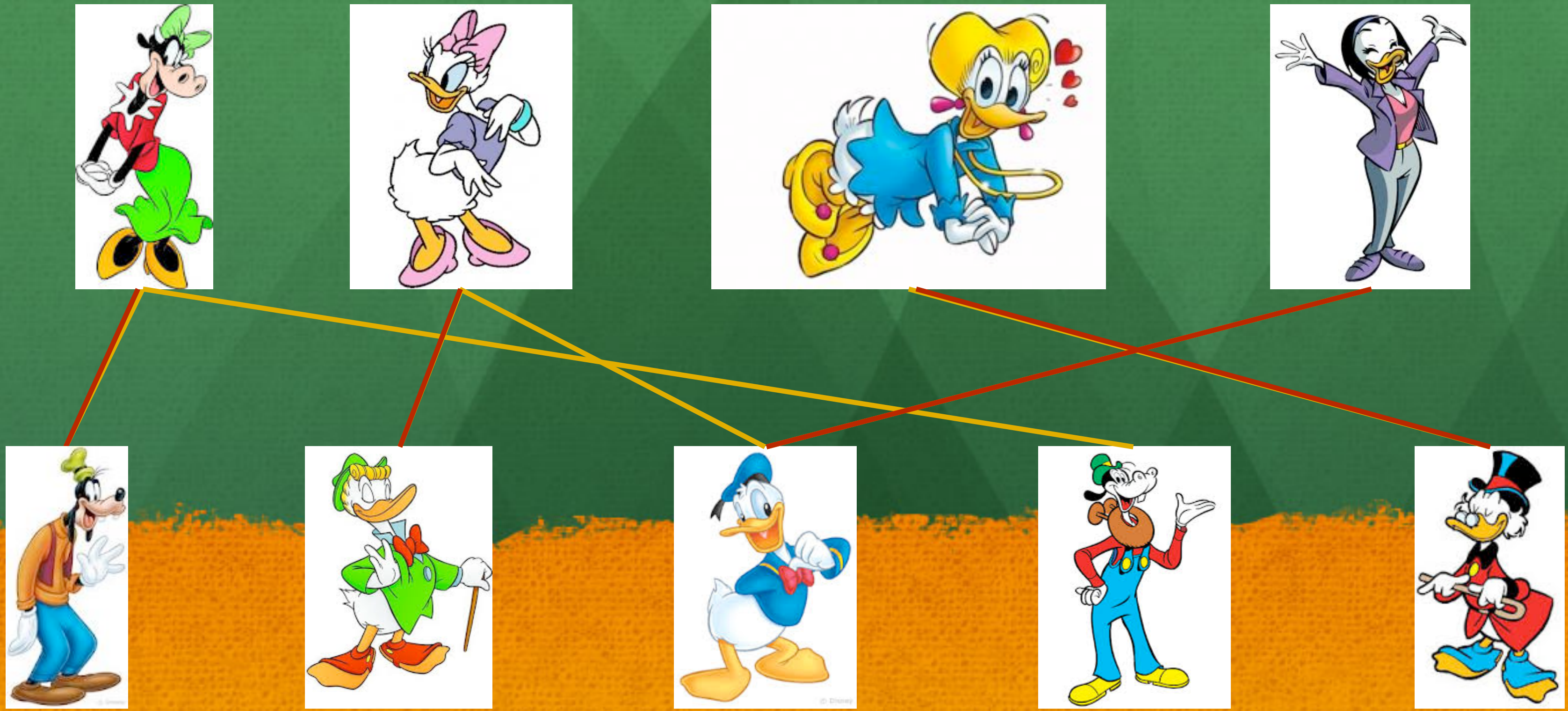
Il problema dei matrimoni

Questo problema viene proposto dal matematico inglese Philip Hall nel 1935:

- Ci sono n ragazze ed $m \geq n$ ragazzi.
- Ogni ragazza (dopo una lunga riflessione!) presenta una lista di ragazzi che le piacciono.
- Possiamo fare l'assunzione che i ragazzi siano di animo nobile e che non vogliano spezzare il cuore di alcuna ragazza per cui ricambieranno sempre l'apprezzamento.
- Si vuole scegliere le coppie in modo da celebrare n matrimoni.



Definizione: un grafo G si dice bipartito se l'insieme dei suoi nodi si può dividere in 2 sottinsiemi V_1 e V_2 tali che ogni arco collega un nodo di V_1 con un nodo di V_2.

Definizione: un accoppiamento di G è un insieme di archi che non hanno nodi in comune.

Problema: trovare un accoppiamento perfetto M, cioè tale che $|M| = |V_1| \leq |V_2|$.

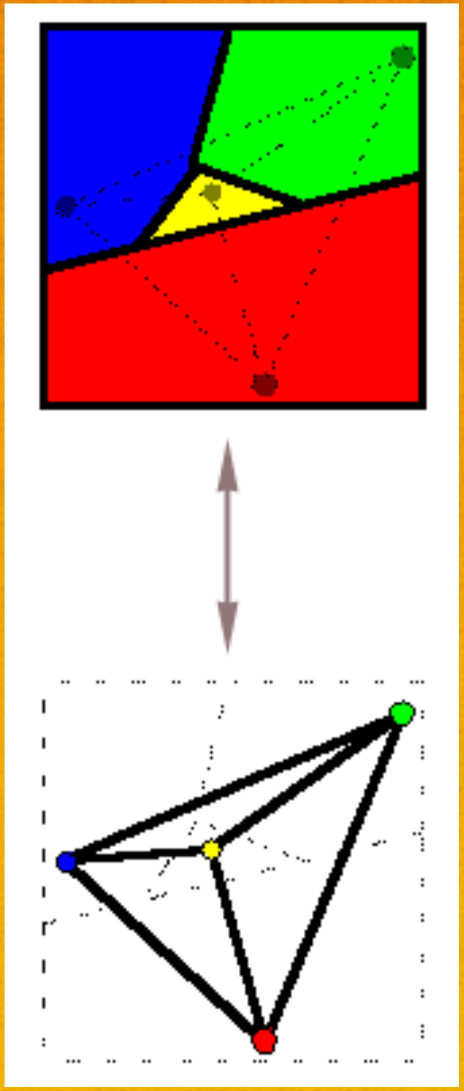
Teorema di Philip Hall (1935): Dato un grafo G bipartito con $|V_1| \leq |V_2|$, G ha un accoppiamento perfetto sse per ogni insieme S di k nodi di V_1 vi sono almeno k nodi di V_2 adiacenti ad un nodo di S.

In simboli, $\forall S \subseteq V_1$, $|S| \leq |adj(S)|$.

Sfortunatamente, questo teorema non fornisce un algoritmo costruttivo per trovare un accoppiamento perfetto.

Colorazione di mappe

Quanti colori ci vorranno? Io ne ho solo 4…



- Rappresentiamo ogni regione della mappa con un nodo;
- Aggiungiamo un arco se due nodi/regioni sono confinanti;
- Il problema diventerà quello di colorare i nodi di un grafo planare in modo tale che nodi adiacenti ricevano colori diversi.

- Il problema viene posto per la prima volta nel 1852, quando Francis Guthrie, uno studente di Augustus De Morgan, congettura che 4 colori siano sempre sufficienti.
- La prima pubblicazione relativa all'argomento si deve ad Arthur Cayley [1879].
- Negli anni successivi, molti matematici tentano invano di dimostrare la congettura.

- La prima dimostrazione, a lungo riconosciuta come definitiva, viene formulata nel 1879 da Kempe; nel 1880 Tait annuncia di avere trovato un’ulteriore dimostrazione del teorema.
- Nel 1890, Heawood scopre un errore che mina la dimostrazione di Kempe, ben undici anni dopo la sua formulazione; l'anno successivo, ad opera di Petersen, anche la dimostrazione di Tait viene riconosciuta errata.
- Confutando la dimostrazione di Kempe, Heawood dimostra tuttavia che cinque colori sono sufficienti per qualsiasi mappa.

- La definitiva dimostrazione del teorema per quattro soli colori viene fornita nel 1977 da parte di Appel e Haken.
- La dimostrazione si basa sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili a 1.936 configurazioni (poi ulteriormente ridotte a 1.476), per le quali la validità del teorema viene verificata caso per caso con l’ausilio di un calcolatore.

- L’utilizzo di un algoritmo per verificare l'esattezza della congettura scatena grandi polemiche sull'affidabilità di questi metodi. Il fatto che la dimostrazione sia basata sull'analisi di una moltitudine di casi discreti porta alcuni matematici a contestarne l'effettiva validità: sia per l'impraticabilità di una verifica manuale di tutti i casi possibili, sia per l'impossibiltà di avere la certezza che l'algoritmo sia implementato correttamente. Ad ogni modo, nonostante le accuse di scarsa "eleganza", nell'algoritmo non è mai stato trovato alcun errore.
- Infine, nel 2000, Dharwadker propone una nuova dimostrazione del teorema che richiede l'utilizzo della teoria dei gruppi.

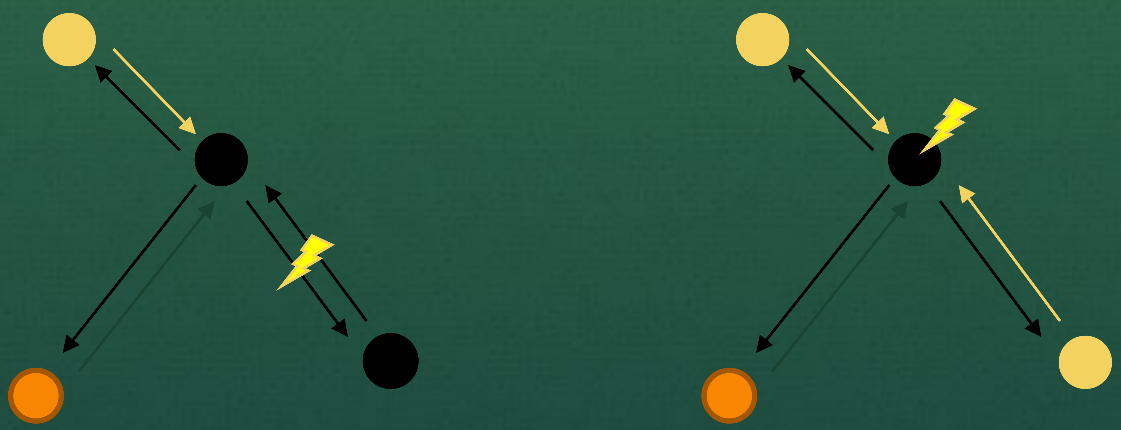
Un problema di scheduling

In un orario dei corsi, corsi tenuti dallo stesso docente o previsti per lo stesso anno non possono avere lo stesso orario.
Vogliamo minimizzare il numero di ore in cui ci sono lezioni.

- Corsi ⇔ nodi
- Restrizioni che forzano orari diversi ⇔ archi
- Orari ⇔ colori

Un problema di assegnazione di frequenze

In una rete senza fili, ogni stazione radio trasmette con una frequenza. Vogliamo minimizzare il numero di frequenze evitando interferenze:
messaggi trasmessi sulla stessa frequenza nella stessa area (collisioni dirette) o più messaggi in ricezione sulla stessa frequenza (collisioni nascoste) vengono persi.



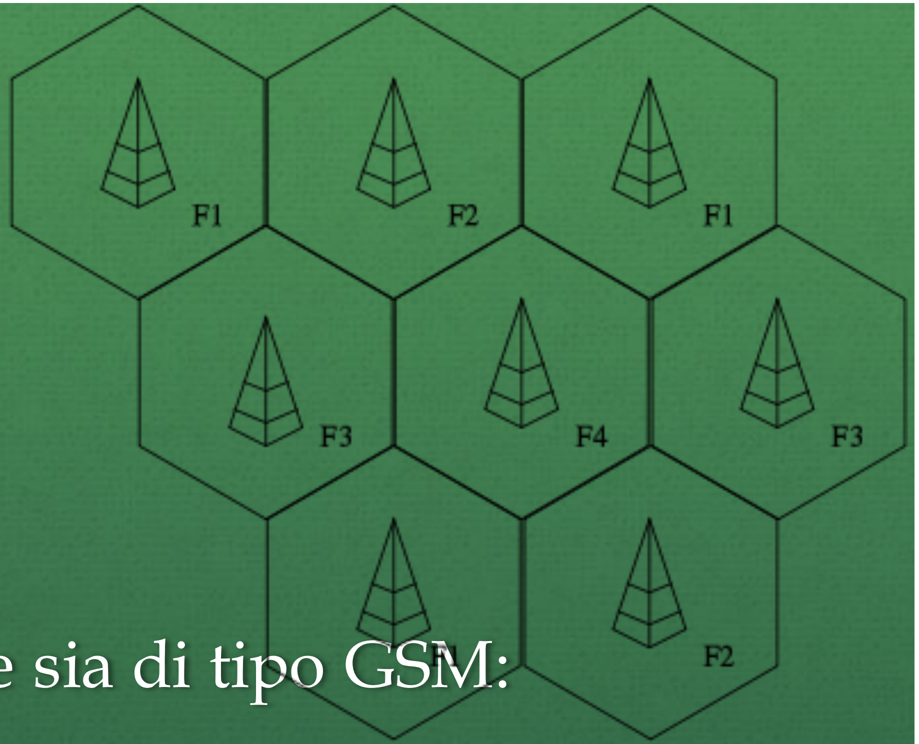
- Grafo dei conflitti:
  antenne ⇔ nodi
  possibili comunicazioni ⇔ archi
  frequenze ⇔ colori

- La semplice colorazione dei nodi non garantisce un risultato corretto:

E' necessario generalizzare il problema…

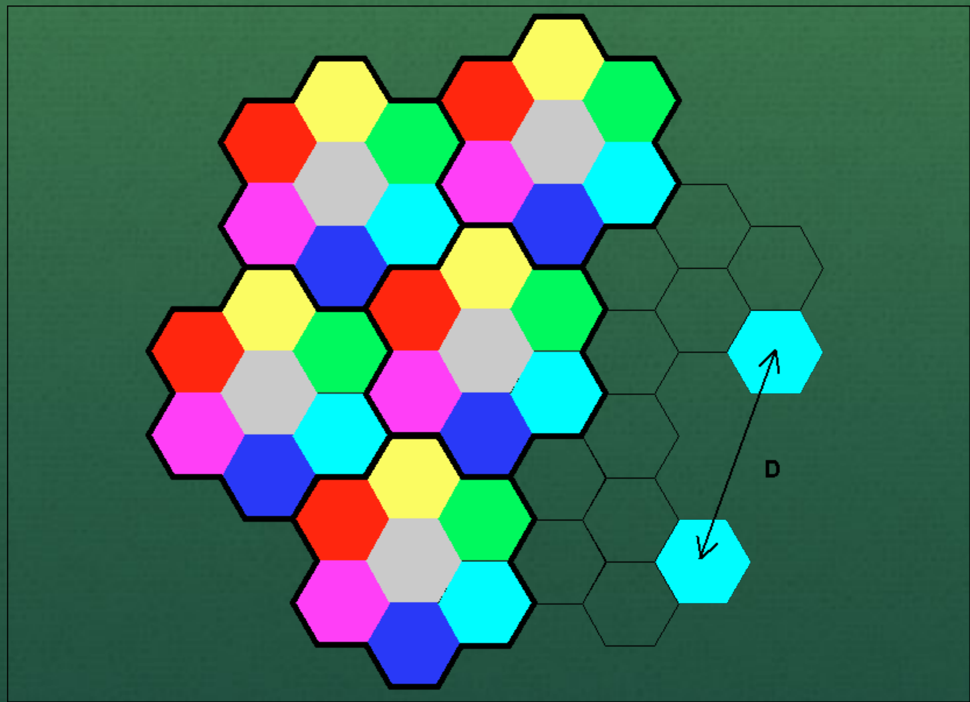
L(1,1)-etichettatura

- Una *L(1,1)*-etichettatura di un grafo *G* è una funzione che assegna colori dall'insieme 0, … ,λ ai nodi di *G* tale che sia nodi a distanza 2 che nodi adiacenti abbiano colori diversi.
- Problema della *L(1,1)*-etichettatura: minimizzare λ.



- Nel caso particolare in cui la rete sia di tipo GSM:
- si ha una rete cellulare in cui l'area è divisa in celle esagonali.
- Ogni cella ha una stazione che connette la rete fissa con i dispositivi mobili che si trovano momentaneamente in quella cella.
- I telefoni mobili si connettono alla rete GSM cercando di raggiungere la stazione relativa alla cella in cui si trovano.

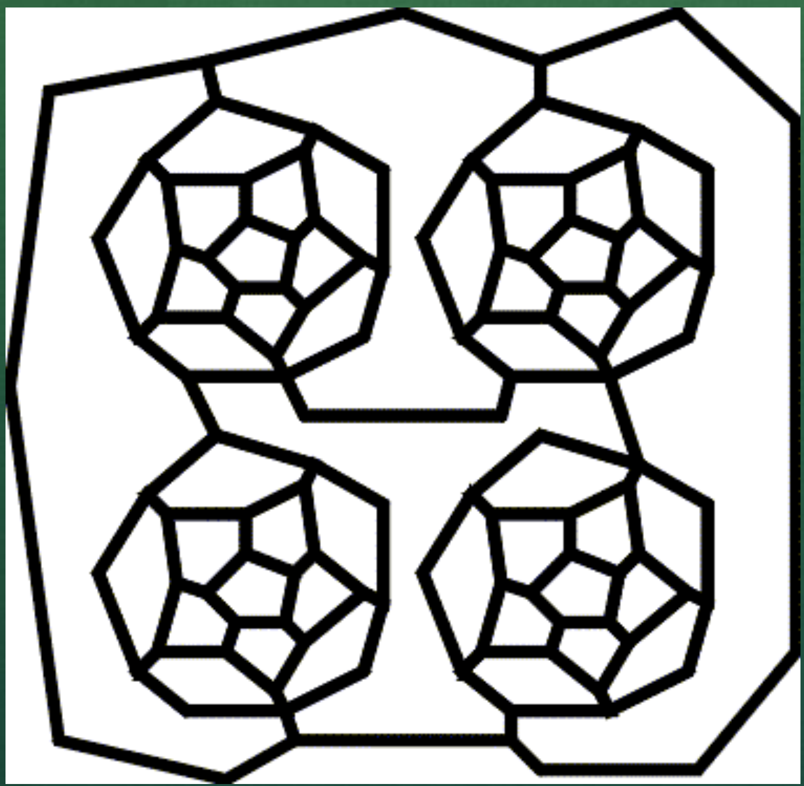
Le celle della rete GSM devono avere frequenze diverse in modo da non disturbarsi vicendevolmente.

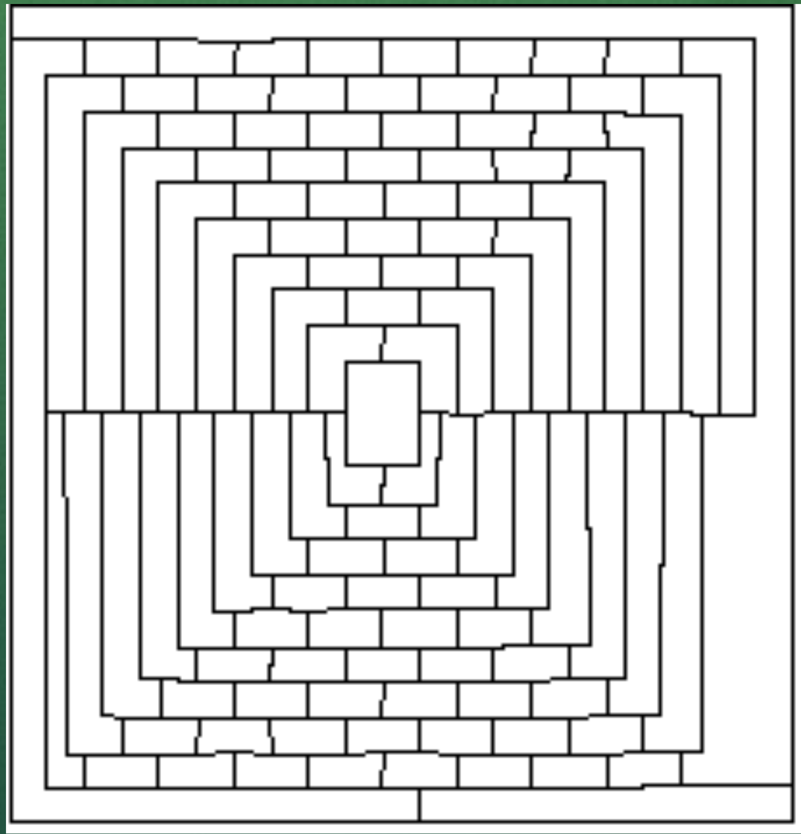


Per concludere…

…un rompicapo, anzi due:

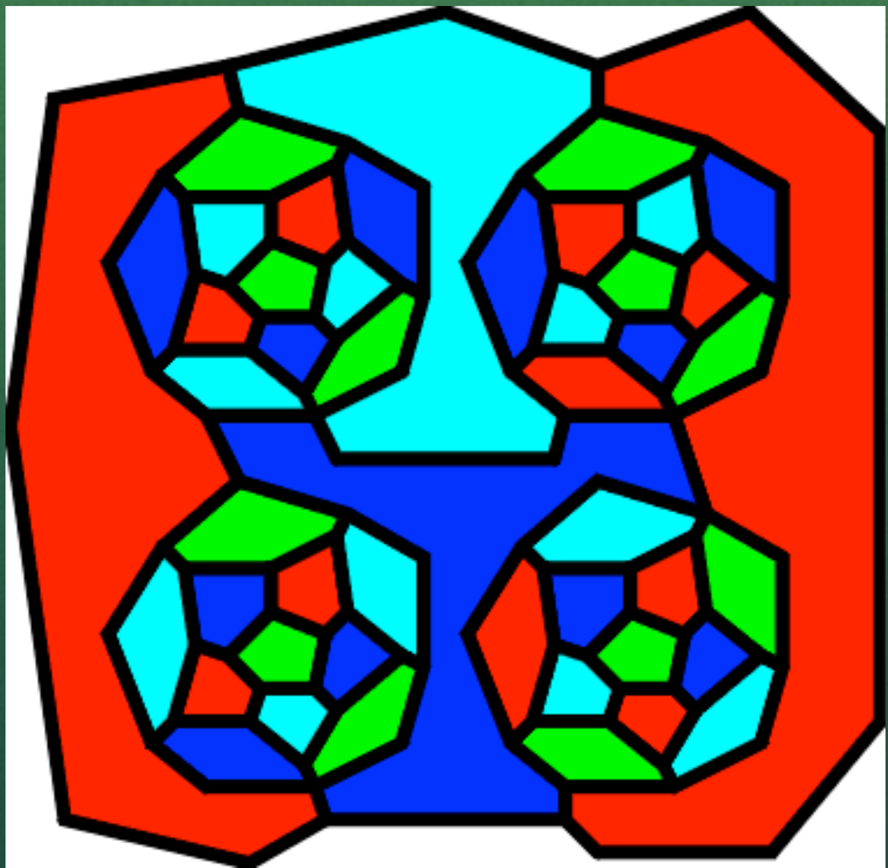
Provate a colorare queste 2 mappe con 4 colori:

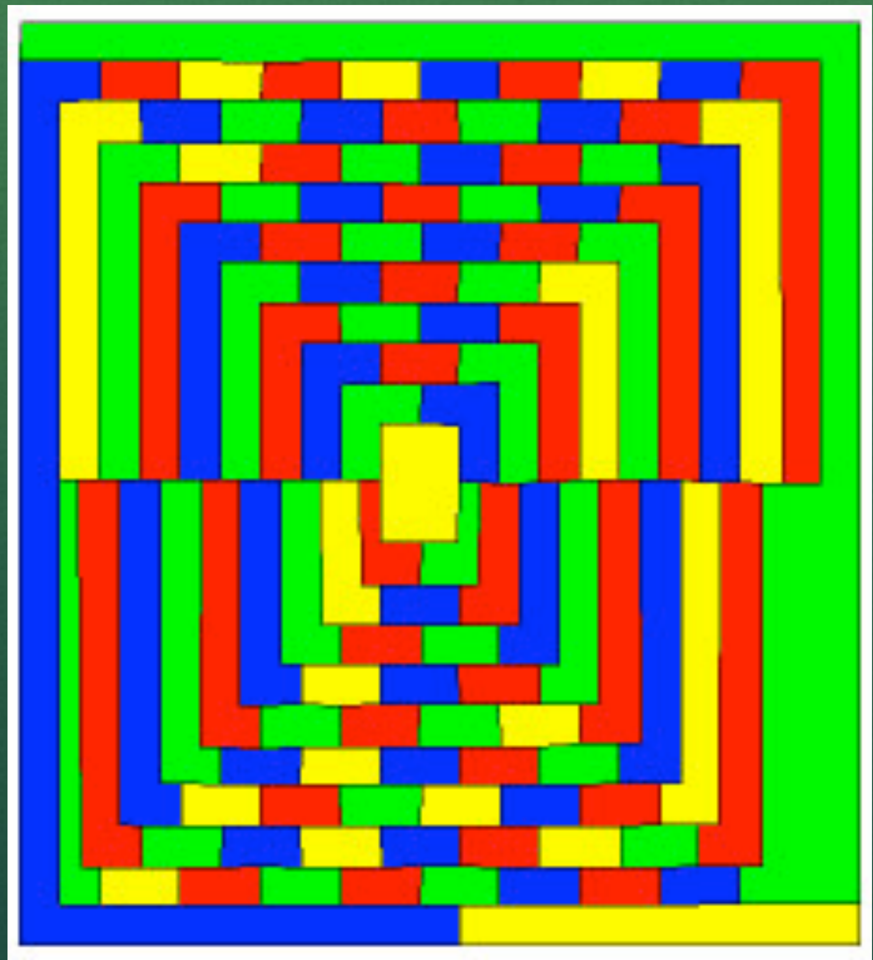




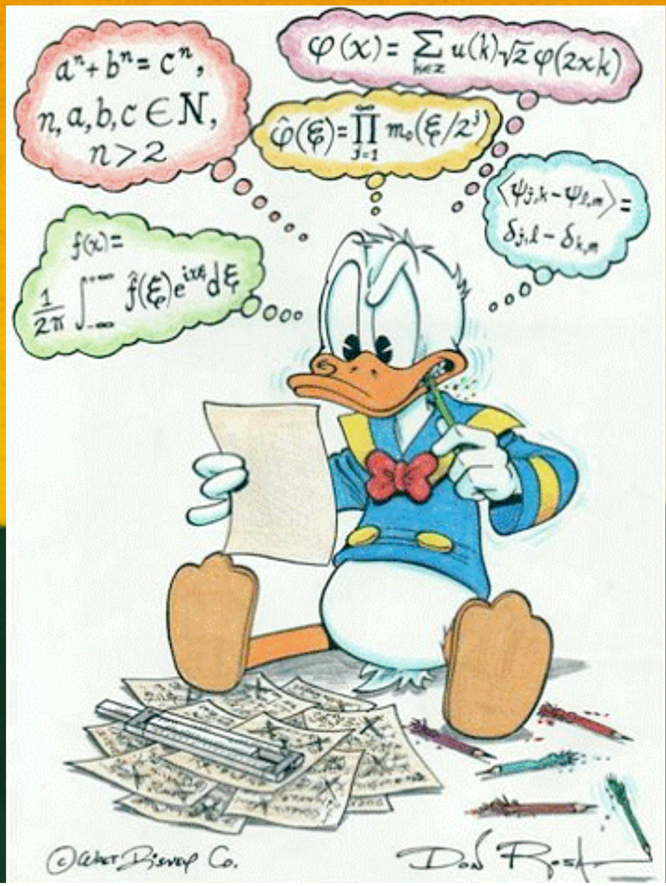
Nel 1975 Martin Gardner dichiarò di poter dimostrare che questa mappa non si può 4-colorare (Pesce d'Aprile)

Soluzioni:





Domande?



$a^n + b^n = c^n$, $n, a, b, c \in N$, $n > 2$
$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\,\varphi(2x-k)$
$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$
$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$
$\langle \psi_{j,k} - \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} - \delta_{k,m}$

Grazie!

Per domande o commenti
potete scrivere a
calamo@di.uniroma1.it