Attività di Alternanza Scuola-Lavoro
Roma, 17 Febbraio 2017

Storia di un grafo che si voleva riposare ma non ci riusciva…

Tiziana Calamoneri
Professore Associato del Dipartimento di Informatica
Sapienza Università di Roma

Riassumiamo…

- Dato un certo problema della vita reale, vogliamo

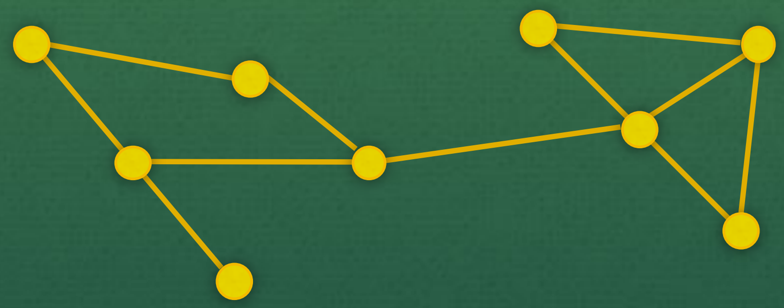
  modellare la situazione

  nel modo più preciso possibile e risolvere il problema tramite un algoritmo efficiente

- Per molti problemi, un buon modello è rappresentato da un grafo

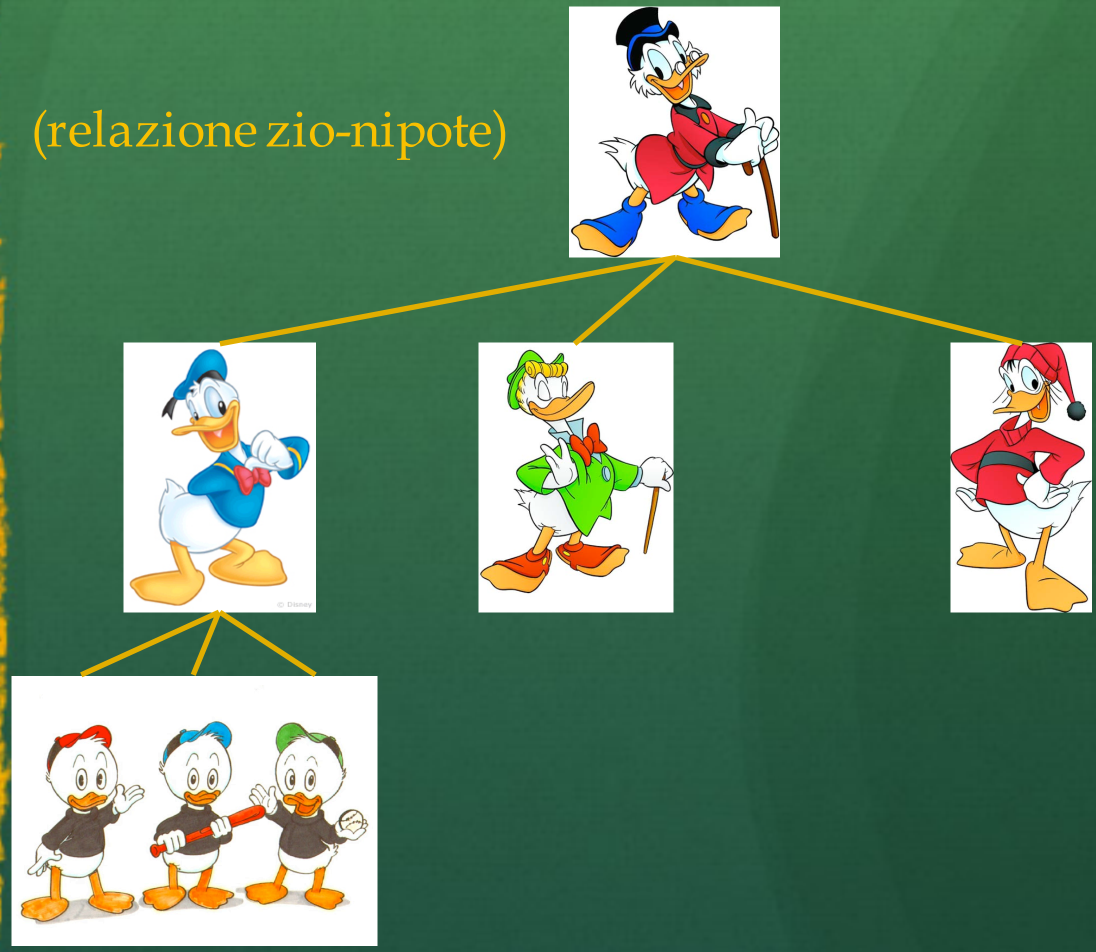
Prima di tutto, capiamoci…

- Cos’è un grafo?
- E’ un oggetto (matematico) costituito da un insieme di entità, dette nodi…



- …ed un insieme di coppie di nodi, dette archi. Se queste coppie sono ordinate, il garfo si dice *orientato.*
- Il numero di archi che escono da un nodo v è detto grado di v ed è di solito indicato con $deg(v)$.

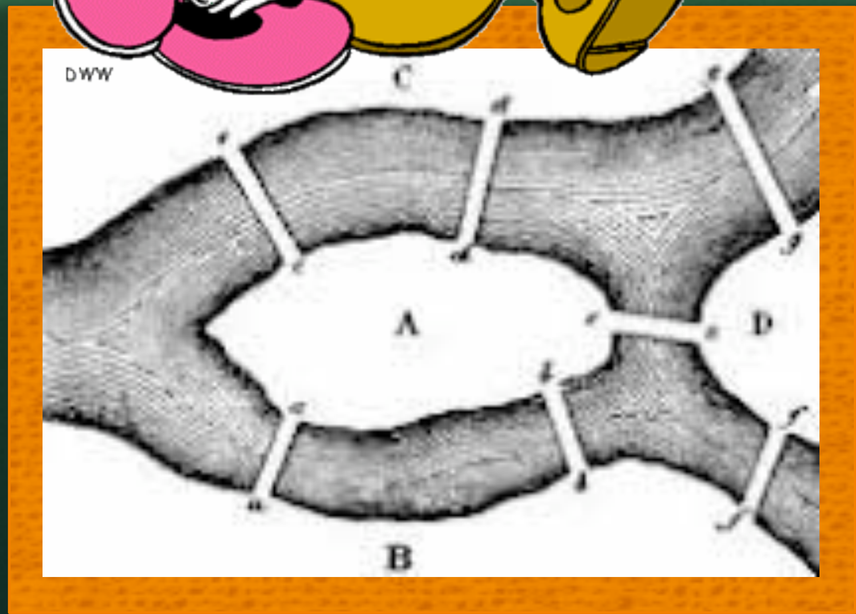
Ogni situazione che ha a che fare con degli oggetti che sono legati tra loro da relazioni (binarie) si può rappresentare con un grafo.
Per questo, i grafi servono a modellare innumerevoli situazioni della vita reale…



Tutto cominciò nel 1736…

… quando, durante le sue passeggiate per la città di Königsberg (oggi Kaliningrad, che sorge sulle sponde del fiume Pregel, il quale forma due isole), Eulero si chiede se sia possibile fare una passeggiata partendo da casa, percorrendo tutti i ponti una ed una sola volta e rincasando.

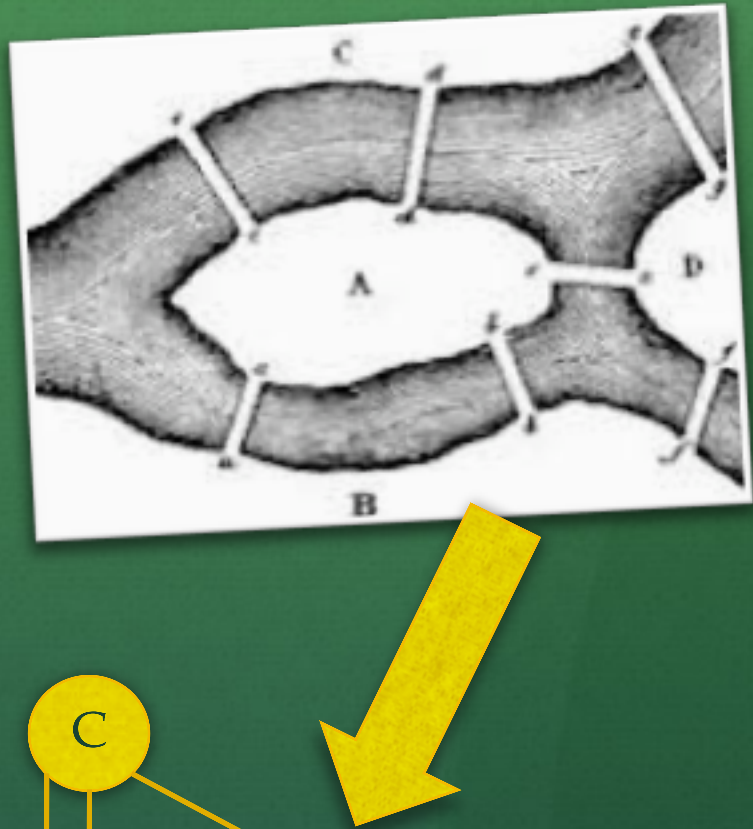
Questo è il famoso **problema dei ponti di Königsberg.**

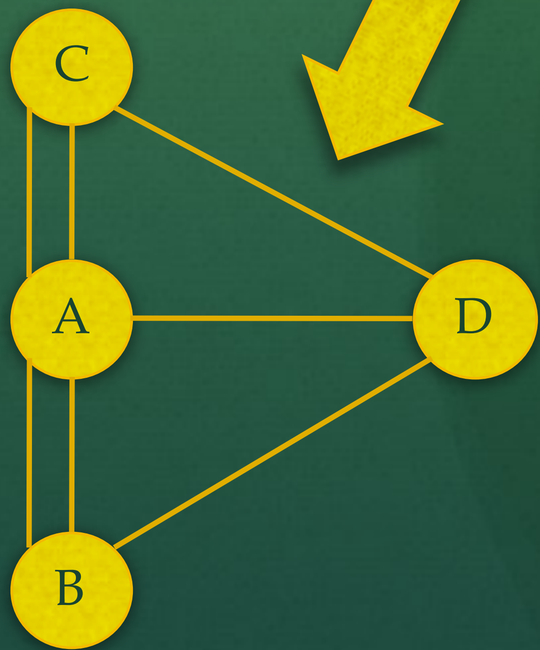


Eulero non si accontenta di risolvere il suo problema, ma lo generalizza, dando così alla luce la **teoria dei grafi**.

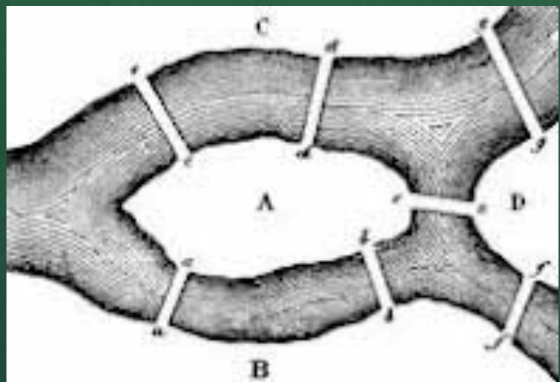
Egli <u>modella</u> il suo problema come problema su grafi:

Un grafo G si dice **euleriano** se è possibile trovare un circuito che passi una ed una sola volta per ciascuno dei suoi archi.

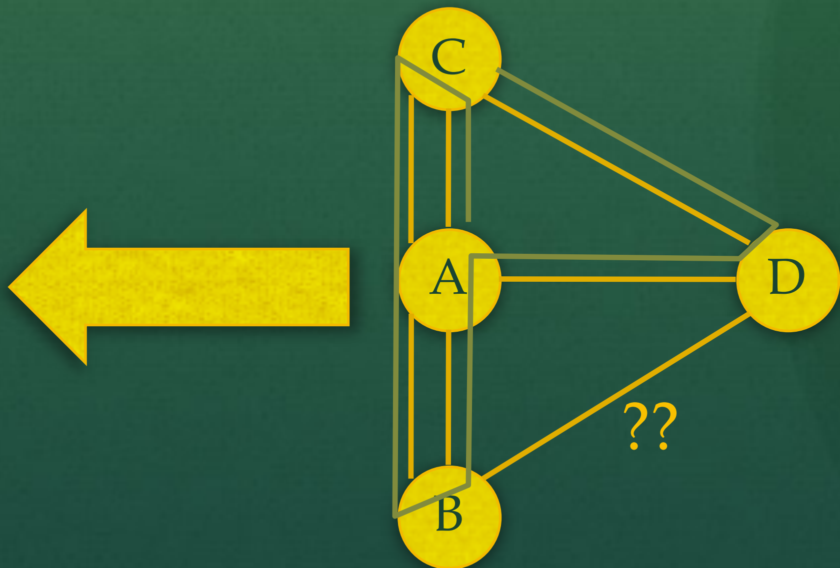




Teor. di Eulero (1736). Un grafo connesso G è euleriano se e solo se esso è connesso e il grado di ciascuno dei suoi nodi è pari.



Non è possibile…



Il problema del lupo, della capra e del cavolo

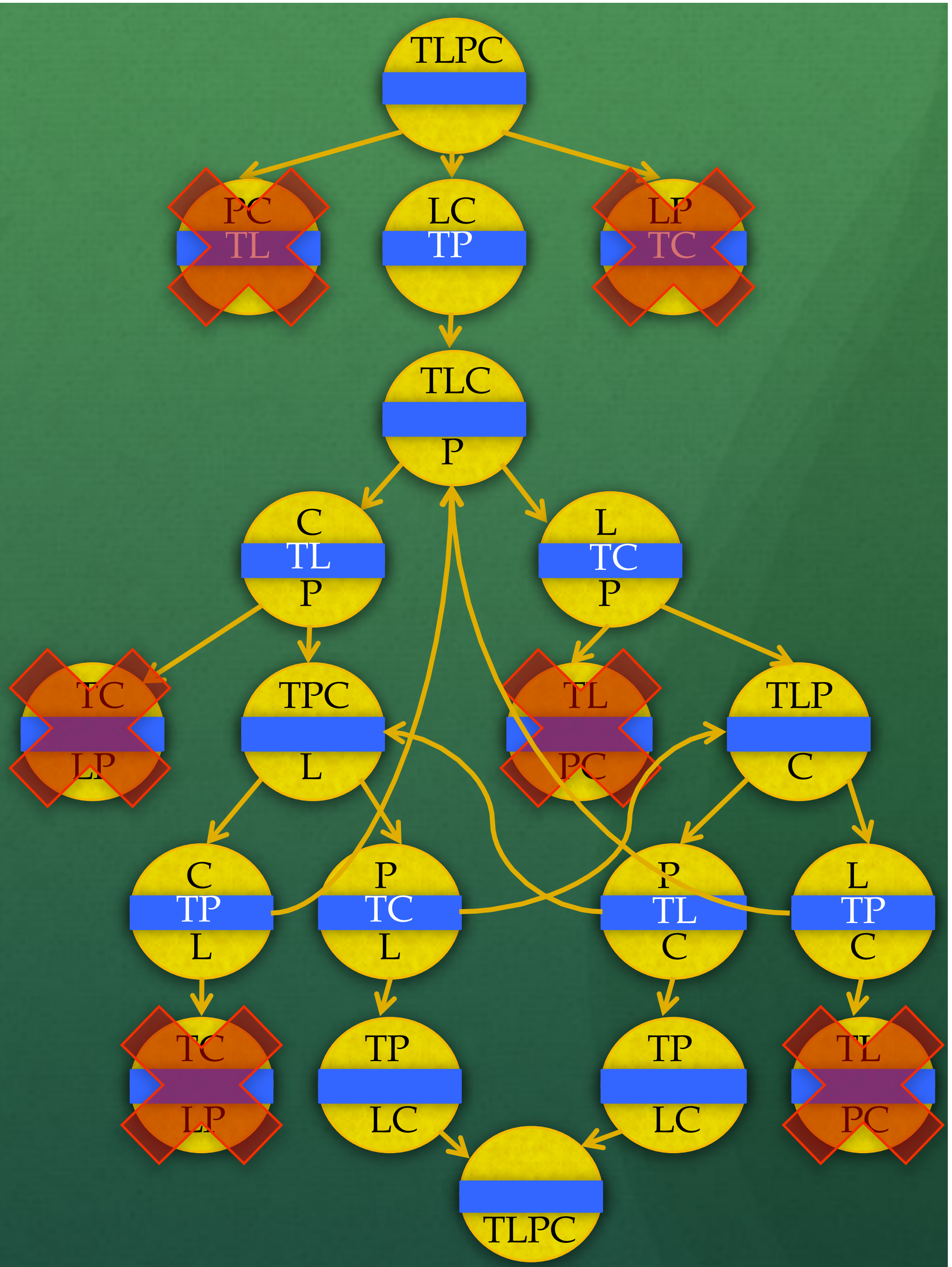
Il problema consiste nel traghettare da una sponda all'altra di un fiume un lupo, una capra ed un cavolo su una barca capace solo di trasportare il barcaiolo e un altro elemento, con il vincolo di non lasciare incustoditi lupo e capra o capra e cavolo sulle rive.

Il problema si può schematizzare con un grafo, in cui vengono rappresentate tutte le possibili situazioni.

L'esistenza di una soluzione equivale all'esistenza di un cammino tra il nodo iniziale e quello finale.

Esistono due possibili cammini semplici tra i due nodi, entrambi con 7 archi.

Il numero minimo di viaggi necessario per compiere l'operazione è pari a 7 e corrisponde al cammino con il minimo numero di archi tra il nodo iniziale e quello finale.

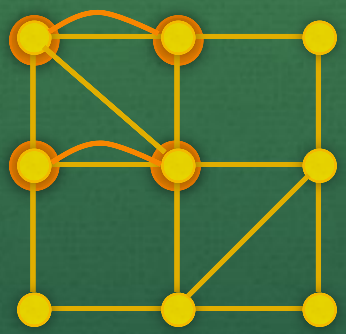


Il problema del postino (cinese)

- Il problema è stato formulato dal matematico cinese Mei-Ku Kwan nel 1962, mentre il nome è stato coniato da Alan Goldman.
- Un postino deve consegnare la posta in ogni strada di sua competenza, cominciando e finendo il giro nel suo ufficio. Qual è l'itinerario più breve?
- Se rappresentiamo la situazione con un grafo (strade=archi ed incroci=nodi) il problema è equivalente a trovare un circuito euleriano.
- E se il grafo non è euleriano?

Ricordiamo che:

- Un grafo è euleriano se tutti i suoi nodi hanno grado pari.
- Il numero di nodi di grado dispari in un grafo è pari.

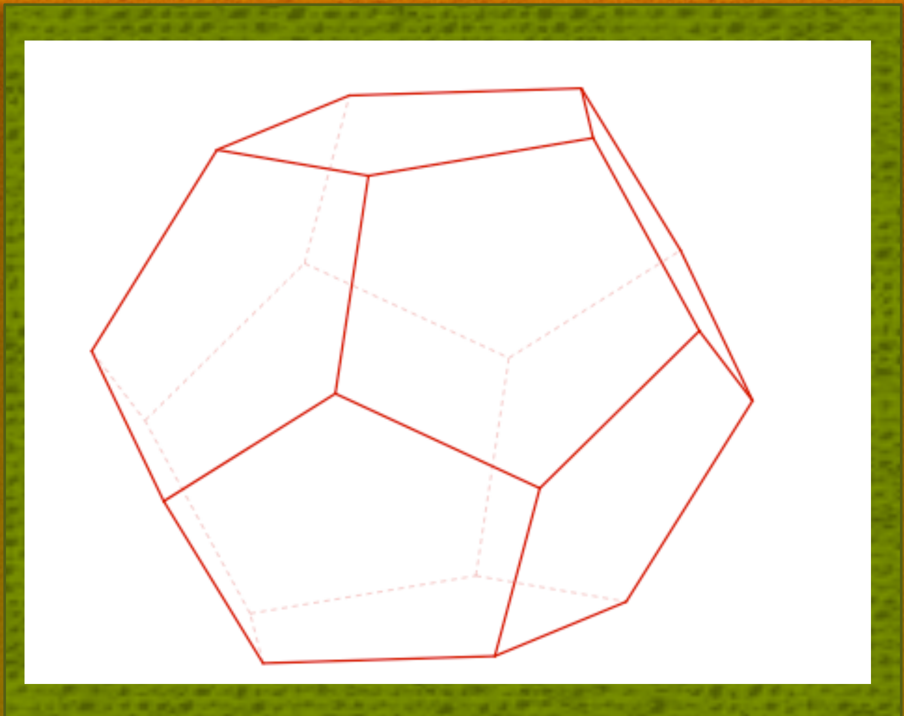


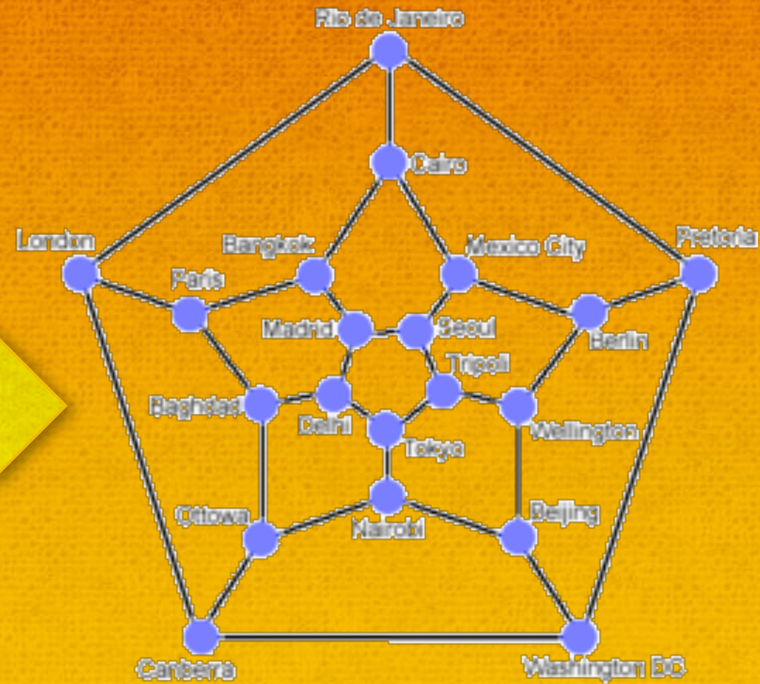
Aggiungendo degli archi tra tutte le coppie di nodi con grado dispari si rendono tutti i nodi di grado pari ed il nuovo grafo è euleriano.

Ogni soluzione passa al massimo 2 volte per lo stesso arco.

Il problema del cammino hamiltoniano

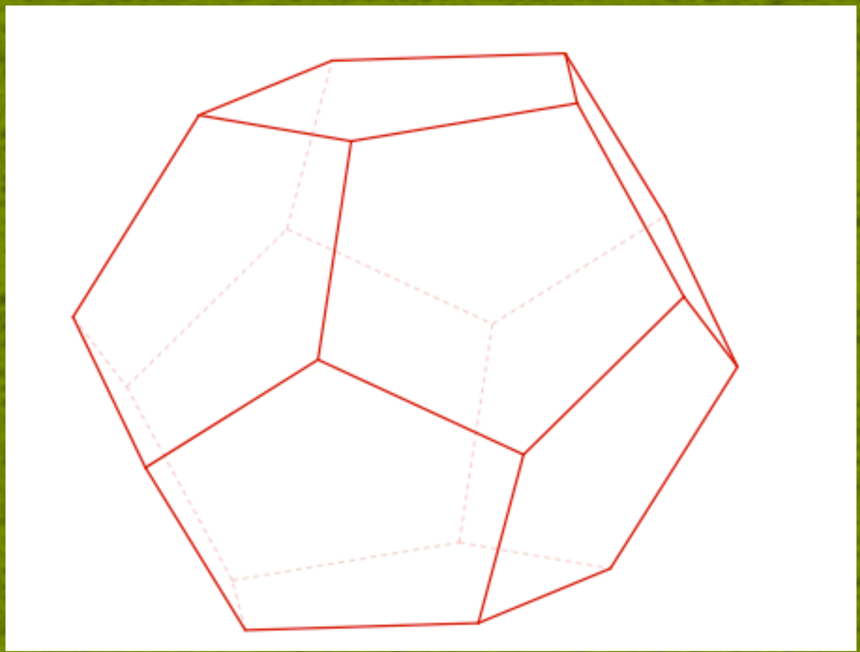
Hamilton progetta un rompicapo da giocare su un dodecaedro, i cui vertici rappresentano delle città. Il problema consiste nel trovare un percorso che, partendo da una città qualunque, passi una ed una sola volta per ogni altra città e ritorni al punto di partenza.

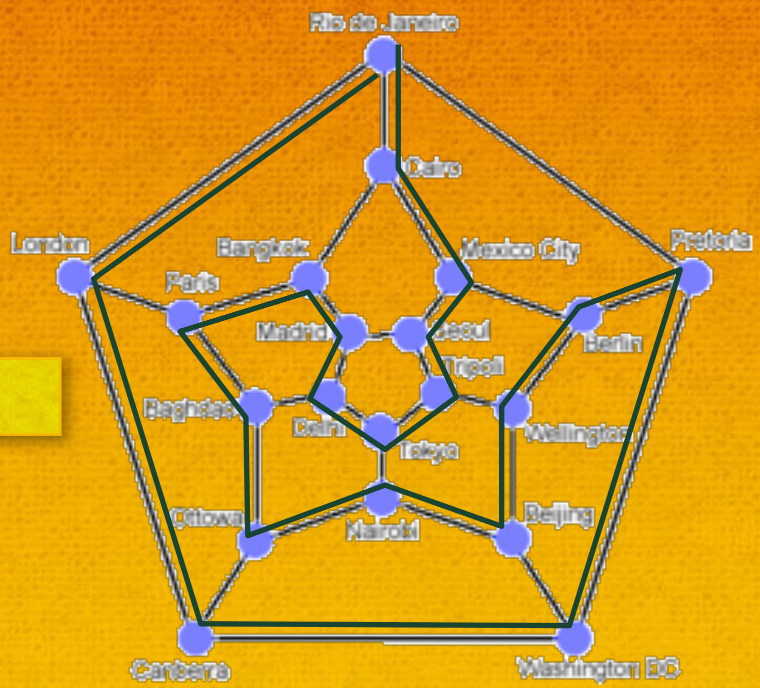


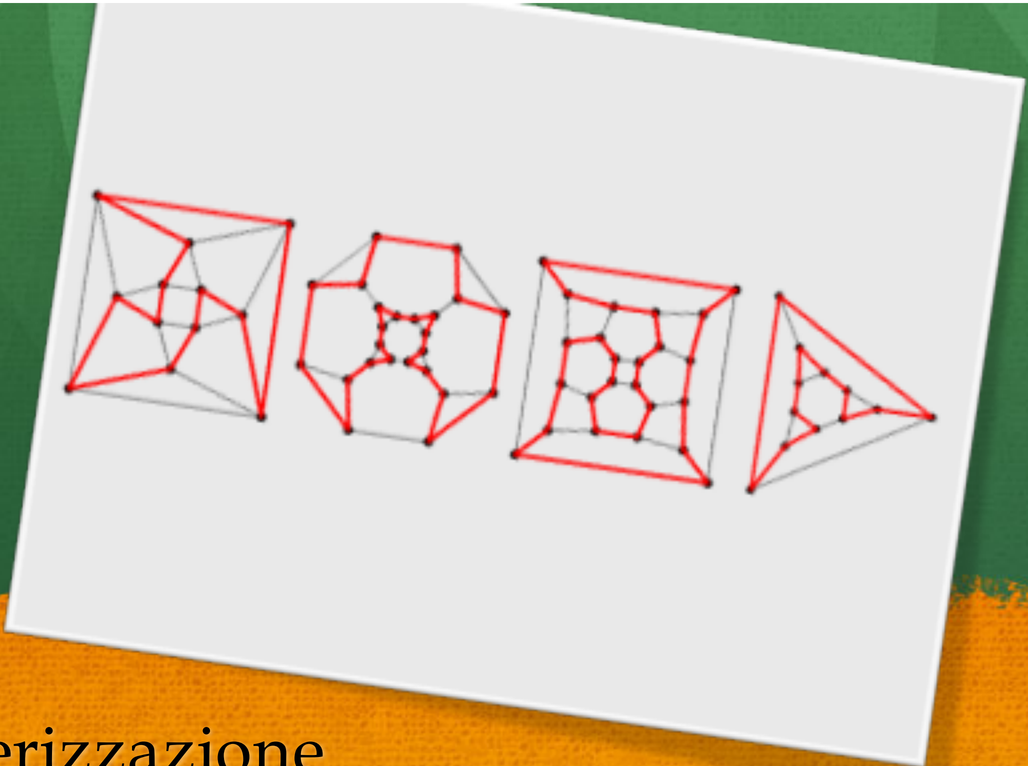


Un grafo *G* si dice hamiltoniano se è possibile trovare un ciclo che passi una ed una sola volta per ciascuno dei suoi nodi.

Il dodecaedro è hamiltoniano…







Non si può dare una caratterizzazione generale e semplice dei grafi hamiltoniani come nel caso dei grafi euleriani.

Th. di Ore (1960). Dato G connesso, se per ogni coppia di nodi v, w non adiacenti si ha $deg(v)+deg(w) \geq n$ allora G è hamiltoniano.

Th. di Jackson (1980). Dato G 2-connesso e d-regolare, se $d \geq n/3$ allora G è hamiltoniano.

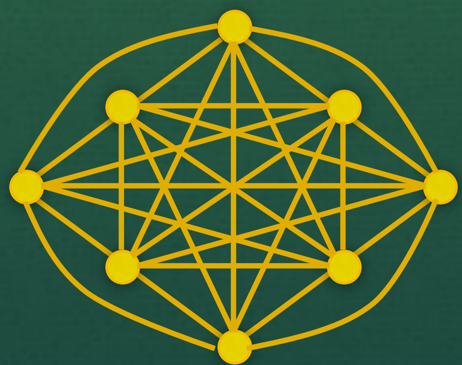
Il problema si può ulteriormente generalizzare:

Un commesso viaggiatore ha un insieme di n destinazioni, in cui deve necessariamente passare. Vuole evitare di passare due volte per la stessa città ma vuole anche spendere il meno possibile.

Possiamo allora assegnare un peso a ciascun arco, che rappresenta il costo necessario per percorrere la distanza che separa due città (che, per semplicità, assumiamo non dipendere dal verso di percorrenza).

La situazione si modella come un grafo completo pesato su n nodi.

Si vuole trovare il circuito hamiltoniano con somma dei pesi minima.



Questo problema è "non più semplice" che stabilire se un dato grafo G è hamiltoniano oppure no. Infatti:

Prendiamo il grafo completo, assegniamo peso 0 agli archi che sono in G, e peso 1 agli archi che non sono in G.

Cerchiamo ora il circuito hamiltoniano di peso minimo sul grafo completo.

Se tale circuito ha peso totale 0, vuol dire che G ha un circuito hamiltoniano.

Se tale circuito ha peso >0, vuol dire che G non ha un circuito hamiltoniano.

Poiché questo problema contiene il problema di testare se un grafo è hamiltoniano come caso particolare, non può essere più semplice da risolvere.

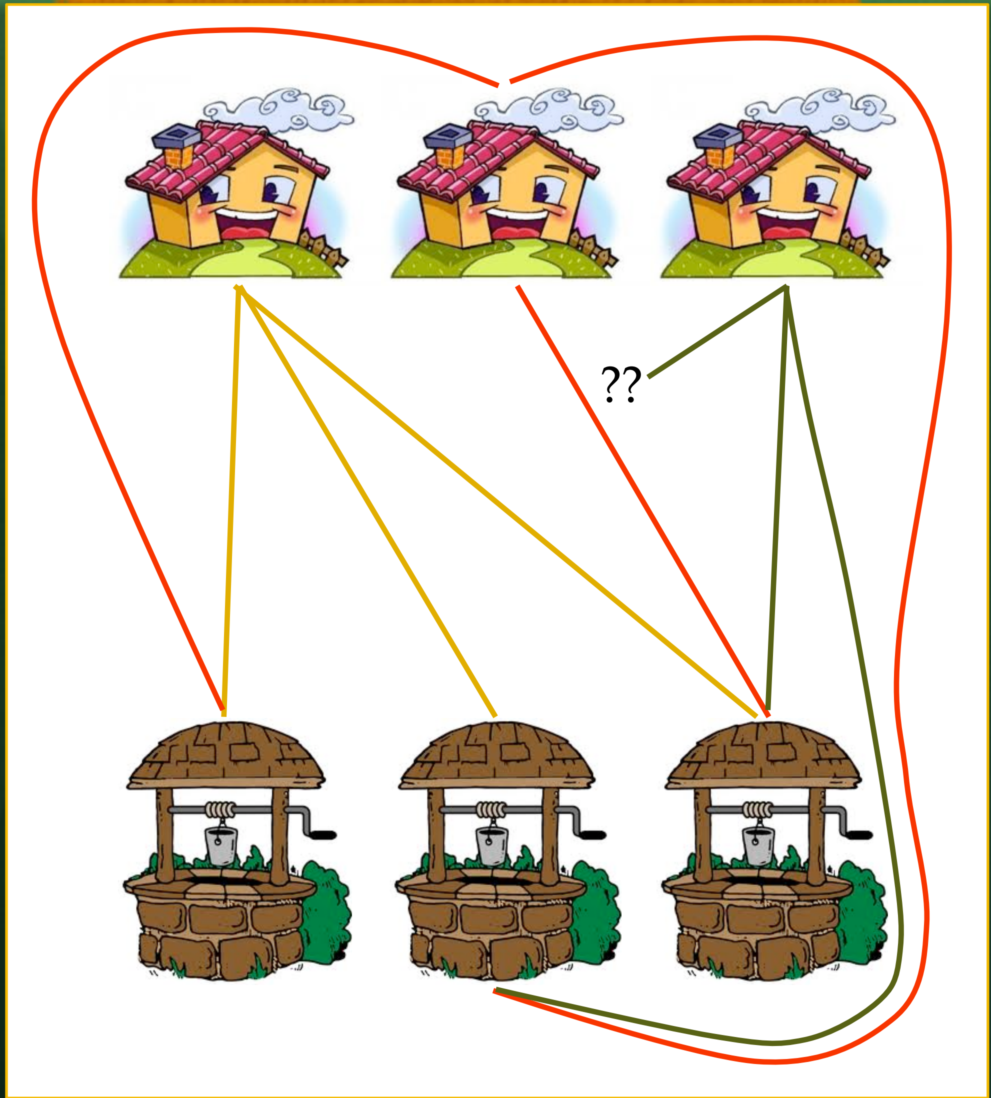
Il problema dei contadini litigiosi

Tre contadini attingono acqua a tre pozzi situati ad una certa distanza da tutte e tre le case.

A causa di ricorrenti siccità, un antico accordo stabilisce che ogni contadino possa utilizzare tutti e tre i pozzi, e quindi da ogni casa partono tre sentieri che arrivano a ciascuno dei pozzi.

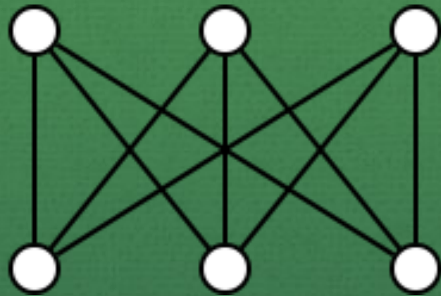
Col tempo si è però sviluppata un'inimicizia tra i tre contadini, che non perdono occasione di litigare quando si incontrino negli incroci dei sentieri.

Invece, non si danno confidenza in prossimità dei pozzi, occupati ad attingere l'acqua.

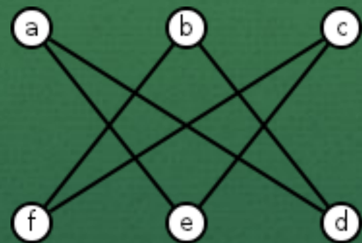


- In effetti, non è possibile condurre tutte e 9 le strade senza nemmeno un incrocio, poiché il grafo che modella questa situazione non è un grafo planare.
- Un **grafo** si dice **planare** se è possibile rappresentarlo sul piano in modo che le linee che rappresentano gli archi non si incrocino tra loro.
- Non tutti i grafi sono planari…

Teorema: I grafi K_5 e $K_{3,3}$ non sono planari.

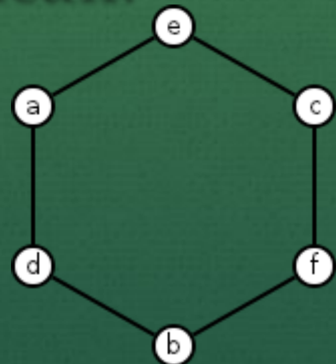


$K_{3,3}$ è non planare - intuizione:

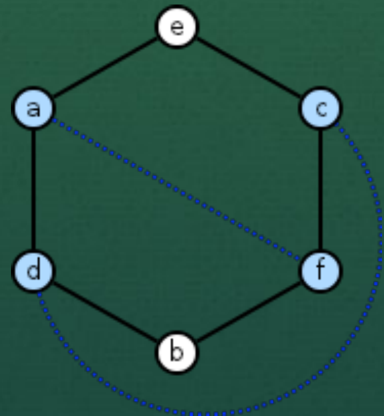


Cancelliamo da $K_{3,3}$ i 3 archi verticali:

Ridisegniamo il grafo:



Riaggiungiamo gli archi cancellati, uno all'interno, uno all'esterno, e uno…



???