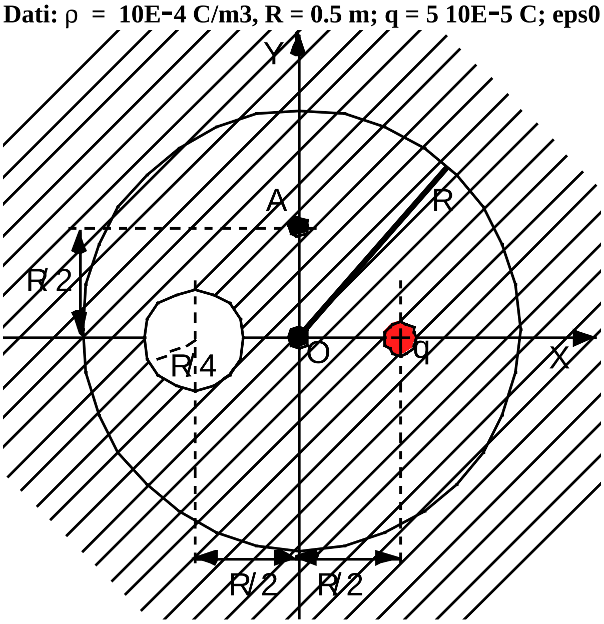
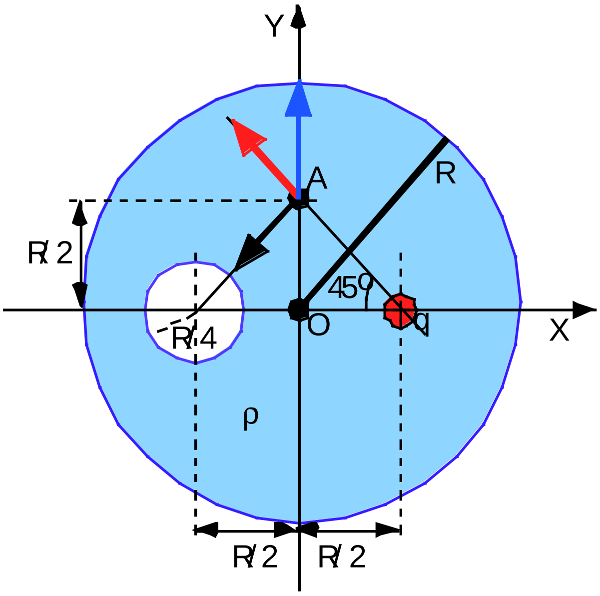
Soluzioni della prova scritta di Fisica II N.O. per INFORMATICA, 7 / 2 / 2008

Es. 1 In una sfera isolante di raggio **R**, carica con densità di carica per unità di volume ρ, è un foro sferico, di raggio **R/4.** Il centro del foro giace sull'asse **X** a **R/2** dal centro della sfera. Una carica **q** giace all'interno della sfera a distanza **R/2** dal centro, nella posizione indicata in figura. Calcolare, in direzione, modulo e verso, il campo elettrico **E** nel punto **A** a distanza **R/2** dal centro, lungo l'asse **Y**.

Dati: ρ = **10E-4 C/m3, R = 0.5 m; q = 5 10E-5 C; eps0 = 8.8542 10E-12 F/m**



- **Soluzione: nella figura sono indicati i vettori prodotti dalla sfera di raggio R, dalla sfera di carica negativa di raggio R/4, e dalla carica q nel punto A:**



$R := 0.5$

$\rho := 10^{-4}$

$q := 5\ 10^{-5}$

$$\text{eps0} = 8.8542\ 10^{-12}$$

8.8542×10^{-12}

Calcolo del modulo di E per la sfera di raggio R, a distanza r<R dal suo centro. Per questo campo è Ex=0, Ey=E.

$$\text{Es}[r\_] := \frac{\rho}{3\ \text{eps0}}\ r$$

$$\text{QsTot} := \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$\text{dA} := \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Calcolo della carica totale di una sfera di raggio R/4 e densità di carica -ρ coincidente con il foro sferico:

$$\text{QspTot} := -\frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{4}\right)^3 \rho$$

Calcolo della componente x della risultante dei campi elettrici sommati vettorialmente in A:
EAx = Ex(carica q puntiforme)+Ex(sfera di raggio R/4 e densità di carica -ρ) --- Unità: V/m

$$\text{EAx} = \frac{1}{4\pi\ \text{eps0}}\left(-\frac{q}{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} - \left(\frac{\text{QspTot}}{(\text{dA})^2}\right)\right) \text{// N}$$

-3.53619×10^6

Calcolo della componente y della risultante dei campi elettrici sommati vettorialmente in A:
EAx = Ey(carica q puntiforme)+Ex(sfera di raggio R/4, densità di carica -ρ)+Ey(sfera di raggio R, densità di carica ρ) --- Unità: V/m
Il segno di ciascuna compenente viene dedotto dall'osservazione dell'orientazione dei vettori corripondenti.

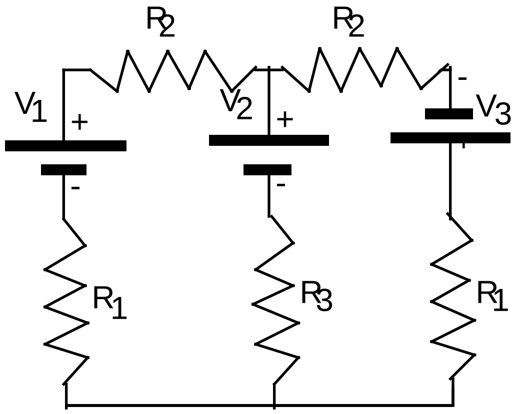
$$\text{EAy} = \frac{1}{4\pi\ \text{eps0}}\left(\frac{q}{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} - \left(\frac{\text{QspTot}}{(\text{dA})^2}\right) + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 \rho\right) \text{// N}$$

3.71266×10^6

$$\text{EAtot} = \sqrt{\text{EAx}^2 + \text{EAy}^2}$$

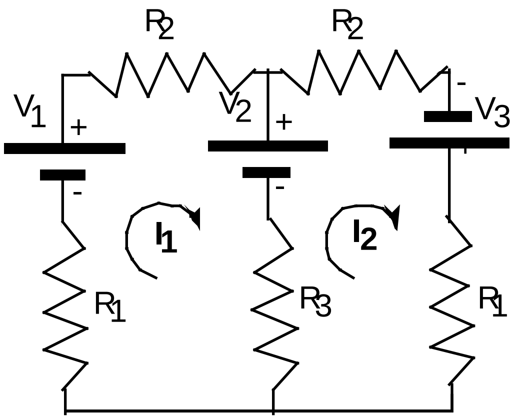
5.12723×10^6

- **Es. 2** Si consideri il circuito in figura: calcolare la corrente che scorre in **R3**
  Dati: V1 = 10 V, V2 = 20 V, V3 = 30 V, R1 = 5 Ohm, R2 = 10 Ohm, R3 = 40 Ohm




```
V1 := 10

V2 := 20

V3 := 30

R1 := 5

R2 := 10

R3 := 40
```

SOLUZIONE:
Si risolve il circuito mediante i principi di Kirchoff, scegliendo come maglie e correnti quelle indicate in figura.



- **Equazioni delle 2 maglie indicate in figura:**
  V1-V2 = R1I1+R2I2+R3(I1-I2) --> V1-V2=(R1+R2+R3)I1 - R3I2
  V2+V3=R2I2+R1I2+R3(I2-I1) --> V2+V3=-R3I1 + (R1+R2+R3)I2

Definizione della Matrice dei Coefficenti:

```
mKc = {{R1 + R2 + R3, -R3}, {-R3, R1 + R2 + R3}}

{{55, -40}, {-40, 55}}

a1 = V1 - V2

-10
```

```
a2 = V2 + V3
```

50

```
mKc {I1, I2} == {a1, a2}
```

{{55.9649, -40.7018}, {-65.9649, 90.7018}} == {-10, 50}

Soluzione del sistema lineare:

```
LinearSolve[mKc, {a1, a2}] // N
```

{1.01754, 1.64912}

```
I1 := 1.0175438596491229
```

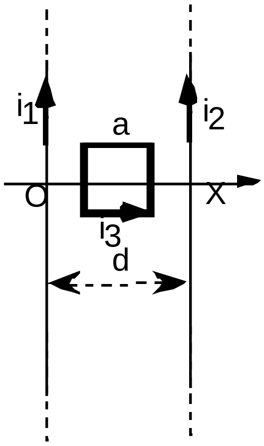
```
I2 := 1.6491228070175439
```

Corrente attraverso R3:

```
IR3 = I1 - I2
```

-0.631579

- **Es. 3** Due fili rettilinei indefiniti, percorsi da correnti concordi di valore **i1** e **i2**, sono paralleli tra loro e a distanza **d**. Una spira quadrata, di lato **a** e percorsa dalla corrente **i3**, si trova al centro tra i due fili e sul loro stesso piano.
Calcolare la forza totale agente sul lato della spira più vicino al filo percorso da **i2**.
Dati: d = 0.1 m, i1 = 1 A, i2= 0.25 A, i3= 0.10 A



Soluzione:

Modulo del campo prodotto dal filo in cui scorre la corrente i1 (formula di Biot-Savart):

```
ClearAll[B1, B2]
```

$$B1[x\_] := \frac{i1}{2\,x}$$

Modulo del campo prodotto dal filo in cui scorre la corrente i2 (formula di Biot-Savart):

$$B2[x\_] := \frac{i2}{2\,(d - x)}$$

Intensità di B risultante nella posizione del lato del quadrato più vicina al filo 1 (lato 1 della spira quadrata):

```
Btot1[x_] = B1[x] - B2[d - x]
```

$$\frac{0.375}{x}$$

Intensità di B risultante nella posizione del lato del quadrato più vicina al filo 2 (lato 2 della spira quadrata):

```
Btot2[x_] = B1[x + a] - B2[d - x + a]
```

$$-\frac{0.125}{-0.01+x}+\frac{1}{2\,(0.01+x)}$$

Calcolo della Forza risultante sul lato 1 della spira quadrata:

```
F1[x_] = Btot1[x] a i3
```

$$\frac{0.000375}{x}$$

Calcolo della Forza risultante sul lato 2 della spira quadrata:

```
F2[x_] = Btot2[x] a i3
```

$$0.001\left(-\frac{0.125}{-0.01+x}+\frac{1}{2\,(0.01+x)}\right)$$

Forza totale risultante sulla spira quadrata:

```
Ftot[x_] = F1[x] - F2[x]
```

$$\frac{0.000375}{x}-0.001\left(-\frac{0.125}{-0.01+x}+\frac{1}{2\,(0.01+x)}\right)$$

Calcoliamo la derivata prima rispetto ad x di Ftot: dFtot/dx

```
DerFtot[x_] = Dt[Ftot[x], x, Constants → {a, d, i1, i2, i3}]
```

$$-\frac{0.000375}{x^2}-0.001\left(\frac{0.125}{(-0.01+x)^2}-\frac{1}{2\,(0.01+x)^2}\right)$$

Ponendo dFtot/dx=0 troviamo il valore di x in cui la spira quadrata è in equilibrio

```
xEq = Solve[DerFtot[x] == 0, x][[1]]
```

$\{x \to -0.0046825\}$

Inseriamo i dati numerici:

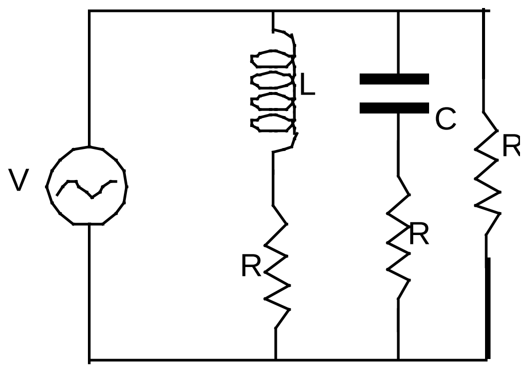
```
d := 0.1

i1 := 1

i2 := 0.25

i3 := 0.1

a := 0.01

N[xEq]
```

$\{x \to -0.0046825\}$

```
N[Ftot[xEq]]
```

$$\left\{\frac{0.000375}{x\to -0.0046825}-0.001\left(-\frac{0.125}{-0.01+(x\to -0.0046825)}+\frac{0.5}{0.01+(x\to -0.0046825)}\right)\right\}$$

■ **Es. 4** Calcolare l'espressione dell'impedenza totale e la frequenza di risonanza del circuito in figura.
Dati: C = 10E-10 F, L = 10-3 H, R = 10 Ohm




```
ClearAll[ω, z1, z2, z3, w, R, Co, L]
```

$$\text{Z1} := I\,\omega\,L + R$$

$$\text{Z2} := R + \frac{1}{I\,\omega\,Co}$$

$$\text{Z3} := R$$

$$\text{Ztot} = \frac{1}{\frac{1}{I\,\omega\,L+R} + \frac{I\,\omega\,Co}{1+R\,I\,\omega\,Co} + \frac{1}{R}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+i\,L\,\omega} + \frac{i\,Co\,\omega}{1+i\,Co\,R\,\omega}}$$

Troviamo la parte **Immaginaria** dell'impedenza totale Ztot:

```
FImZtot[ω_] = ComplexExpand[Im[Ztot]]
```

$$\frac{L\,\omega}{\left(R^2+L^2\omega^2\right)\left(\left(-\frac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2}+\frac{Co\,\omega}{1+Co^2R^2\omega^2}\right)^2+\left(\frac{1}{R}+\frac{R}{R^2+L^2\omega^2}+\frac{Co^2R\,\omega^2}{1+Co^2R^2\omega^2}\right)^2\right)} - \frac{Co\,\omega}{\left(1+Co^2R^2\omega^2\right)\left(\left(-\frac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2}+\frac{Co\,\omega}{1+Co^2R^2\omega^2}\right)^2+\left(\frac{1}{R}+\frac{R}{R^2+L^2\omega^2}+\frac{Co^2R\,\omega^2}{1+Co^2R^2\omega^2}\right)^2\right)}$$

Annulliamo Im[Ztot] per trovare la pulsazione di risonanza:

```
Solve[FImZtot[ω] == 0, ω]
```

$$\left\{\{\omega \to 0\},\ \left\{\omega \to -\frac{\sqrt{-L+Co\,R^2}}{\sqrt{-Co\,L^2+Co^2\,L\,R^2}}\right\},\ \left\{\omega \to \frac{\sqrt{-L+Co\,R^2}}{\sqrt{-Co\,L^2+Co^2\,L\,R^2}}\right\}\right\}$$

$$\omega\text{Ris} := \frac{\sqrt{-L+Co\,R^2}}{\sqrt{-Co\,L^2+Co^2\,L\,R^2}}$$

```
Simplify[ωRis, L > 0]
```

$$\frac{\sqrt{-L+Co\,R^2}}{\sqrt{Co\,L\left(-L+Co\,R^2\right)}}$$

Simplify non semplifica ulteriormente perchè non è verificato che sia CoR2 - L > 0 :

$$\text{Zrad} := Co\,R^2 - L$$

Definiamo di nuovo ω alla risonanza:

$$\omega R := \frac{\sqrt{Zrad}}{\sqrt{Co\, L\, Zrad}}$$

```
Simplify[ωR, Zrad > 0]
```

$$\frac{1}{\sqrt{Co\, L}}$$

Con i dati del problema:

$$L := 10^{-5}$$

$$Co := 10^{-6}$$

```
R := 10
```

Verifichiamo che sia Zrad > 0

```
N[Zrad]
```

```
0.00009
```

Ed ora possiamo trovare il valore di ω alla risonanza, in rad/s:

```
N[ωR]
```

```
316 228.
```