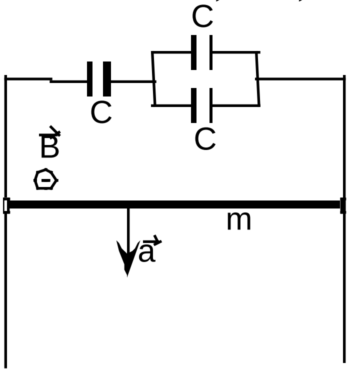
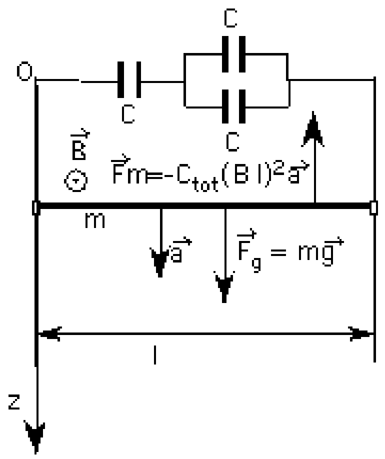
Soluzioni della prova scritta di Fisica II N.O. per INFORMATICA,
13 / 6 / 2007

Es. 1 Una sbarretta conduttrice con resistenza nulla può scorrere senza attrito su due guide conduttrici chiuse da un sistema di tre capacità, ciascuna di valore **C**. Un campo B uniforme è perpendicolare al piano identificato dalle due guide, con il verso indicato in figura. Le guide sono verticali, e la sbarretta, lunga **l** e di massa **m**, è soggetta alla forza di gravità.
Calcolare l'accelerazione con cui cade la sbarretta.
Dati: C = 10E-6 F; l =1 m; m = 0.005 kg; g = 9.8 m/s2; B = 10 T



- **Soluzione:**



In[806]:= `B := 10 Tesla`

In[807]:= `Co := 10`$^{-5}$ `Farad`

In[808]:= `l := 1 Meter`

In[809]:= `m := 0.005 Kilogram`

In[810]:= `g = 9.8 Meter / Second`^{2}

Out[810]= $\frac{9.8\ \text{Meter}}{\text{Second}^2}$

In[811]:=

Le tre capacità corrispondono ad una Ctot data da C in serie alle 2 C in parallelo. Quindi, Ctot = 2C C / (2C + C) = (2/3) C

In[812]:= $\mathtt{Ctot} = \frac{2\,\mathrm{Co}\,\mathrm{Co}}{2\,\mathrm{Co} + \mathrm{Co}}$

Out[812]= $\frac{\mathrm{Farad}}{150\,000}$

La sbarretta, cadendo, fa aumentare l'area attraverso cui passa il flusso di **B**, dato da:
ϕ(B) = B l z, con **z** coordinata della sbarretta lungo la guida.
Questo provocherà una differenza di potenziale ai capi di **Ctot** data dalla legge di Faraday-Neuman:
$\Delta V = \partial\phi(B)/\partial t = B\,l\,\partial z/\partial t = B\,l\,v$ dove **v** è la velocità della sbarretta durante la discesa.

La tensione **ΔV** carica la capacità **Ctot** alla carica **Q = Ctot ΔV = Ctot B l v**.
Dato che la sbarretta scende con un'accelerazione complessiva **a**, la sua velocità varia nel tempo e quindi anche la carica **Q** varia nel tempo. Questa variazione corrisponde ad una corrente:
$i = \partial Q/\partial t = \mathrm{Ctot}\,B\,l\,\partial v/\partial t = \mathrm{Ctot}\,B\,l\,a$

Quindi la corrente che scorre attraverso la sbarretta è proporzionale all'accelerazione **a**. Il campo **B** esercita una forza **Fm** sulla sbarretta percorsa dalla corrente **i** data da:

$Fm = B\,l\,i = (B\,l)^2\,\mathrm{Ctot}\,a$
Questa forza e' diretta in modo tale da opporsi al moto della sbarretta, soggetta anche alla forza di gravità **Fg = mg**.
L'equazione del moto totale della sbarretta è quindi:

$Ftot = Fg - Fm = m\,g - (B\,l)^2\,\mathrm{Ctot}\,a = m\,a$
da cui si ricava l'espressione per **a**:

$$a = \frac{m\,g}{m + \mathrm{Ctot}\,(B\,l)^2}$$

Come ci si aspettava, la sbarretta viene frenata dalla presenza del campo magnetico, per cui si ha **a < g**.
Il valore numerico di **a** è dato da:

In[813]:= $\mathtt{N[acc]} = \frac{\mathrm{m\,g}}{\mathrm{m} + \mathrm{Ctot}\,(\mathrm{B\,l})^2}$

Out[813]= $\frac{0.049\,\mathrm{Kilogram\,Meter}}{\mathrm{Second}^2\left(0.005\,\mathrm{Kilogram} + \frac{\mathrm{Farad\,Meter}^2\,\mathrm{Tesla}^2}{1500}\right)}$

In[814]:= `aNum = 0.049 / (0.005 + 1 / 1500)`

Out[814]= 8.64706

Caso 2: R al posto di C

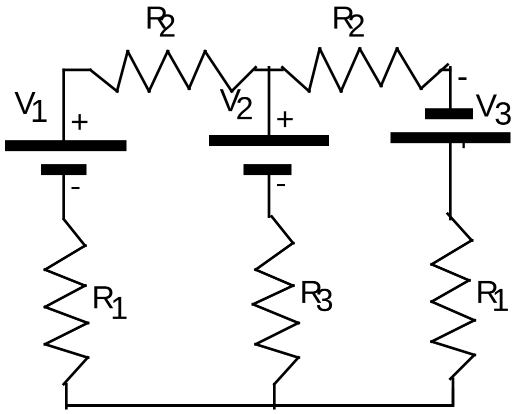
Nel caso che nell'esercizio precedente al posto della rete di Capacità ci sia una resistenza R, la soluzione rimane identica fino al calcolo di **ΔV = B l v** . Quindi la corrente che scorre nella sbarretta è data da:
i = ΔV/R
per cui, la forza a cui è soggetta la sbarretta a causa della presenza del campo magnetico B è data da:

$Fm = B\,l\,i = (B\,l)^2\,R\,v$
e l'equazione del moto della sbarretta diventa:

$Ftot = Fg - Fm = m\,g - (B\,l)^2\,R\,v = m\,a = m\,\frac{dv}{dt}$

questa è un'equazione differenziale in **v** che da' un andamento asintotico per **v: la sbarretta raggiunge una velocità limite.**

- **Es. 3** Si consideri il circuito in figura: calcolare la corrente che scorre in **R_3**
  Dati: V_1 = 10 V, V_2 = 20 V, V3 = 1 V, R_1 = 5 Ohm, R_2 = 10 Ohm, R_3 = 20 Ohm



In[815]:= **V1 := 10**

In[816]:= **V2 := 20**

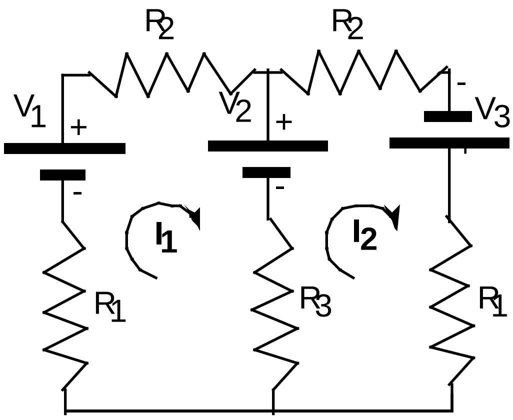
In[817]:= **V3 := 1**

In[818]:= **R1 := 5**

In[819]:= **R2 := 10**

In[820]:= **R3 := 20**

SOLUZIONE:
Si risolve il circuito mediante i principi di Kirchoff, scegliendo come maglie e correnti quelle indicate in figura.



- **Equazioni delle 2 maglie indicate in figura:**
  V1-V2 = R1I1+R2I2+R3(I1-I2) --> V1-V2=(R1+R2+R3)I1 - R3I2
  V2+V3=R2I2+R1I2+R3(I2-I1) --> V2+V3=-R3I1 + (R1+R2+R3)I2

  Definizione della Matrice dei Coefficenti:

In[821]:= **mKc = {{R1 + R2 + R3, -R3}, {-R3, R1 + R2 + R3}}**

Out[821]= {{35, -20}, {-20, 35}}

In[822]:= **a1 = V1 - V2**

Out[822]= -10

In[823]:= `a2 = V2 + V3`

Out[823]= 21

In[824]:= `mKc {I1, I2} == {a1, a2}`

Out[824]= {{35.614, -20.3509}, {-32.9825, 57.7193}} == {-10, 21}

Soluzione del sistema lineare:

In[825]:= `LinearSolve[mKc, {a1, a2}] // N`

Out[825]= {0.0848485, 0.648485}

In[826]:= `I1 := 0.08484848484848485``

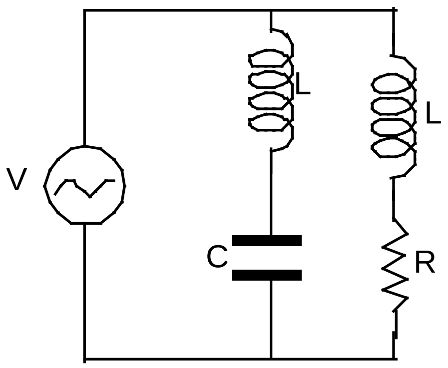
In[827]:= `I2 := 0.6484848484848484``

Corrente attraverso R3:

In[828]:= `IR3 = I1 - I2`

Out[828]= -0.563636

- **Es. 2** Calcolare l'espressione dell'impedenza totale e la frequenza di risonanza del circuito in figura.
  Dati: C = 5E-9 F, L = 10-3 H, R = 1000 Ohm



In[846]:= `ClearAll[ω, z1, z2, z3, w, R, Co, L]`

In[847]:= $Z1 := I\,\omega\,L + R$

$$Z2 := I\,\omega\,L + \frac{1}{I\,\omega\,Co}$$

In[849]:= $$Ztot = \frac{Z1\,Z2}{Z1 + Z2}$$

Out[849]= $$\frac{(R + i\,L\,\omega)\left(-\frac{i}{Co\,\omega} + i\,L\,\omega\right)}{R - \frac{i}{Co\,\omega} + 2\,i\,L\,\omega}$$

Moltiplico a numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, per rendere il denominatore reale:
(Ztot1: primo passaggio di semplificazione di Ztot)

In[850]:= $$Ztot1 = \frac{\left(R + i\left(\frac{1}{Co\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)\right)\left(L\,\omega\left(\frac{1}{Co\,\omega} - L\,\omega\right) + i\,R\left(-\frac{1}{Co\,\omega} + L\,\omega\right)\right)}{\left(R - \frac{i}{Co\,\omega} + 2\,i\,L\,\omega\right)\left(R + \frac{i}{Co\,\omega} - 2\,i\,L\,\omega\right)}$$

Out[850]= $$\frac{\left(R + i\left(\frac{1}{Co\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)\right)\left(L\,\omega\left(\frac{1}{Co\,\omega} - L\,\omega\right) + i\,R\left(-\frac{1}{Co\,\omega} + L\,\omega\right)\right)}{\left(R + \frac{i}{Co\,\omega} - 2\,i\,L\,\omega\right)\left(R - \frac{i}{Co\,\omega} + 2\,i\,L\,\omega\right)}$$

Separo il numeratore di Ztot in parte Immaginaria e Reale:
(Ztot2: secondo passaggio di semplificazione di Ztot)

In[851]:= $$\text{Ztot2} = \frac{1}{R^2 + \left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)^2}\left(R\,L\,\omega\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - L\,\omega\right) - \left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)R\left(-\frac{1}{\text{Co}\,\omega} + L\,\omega\right) + i\left(R^2\left(-\frac{1}{\text{Co}\,\omega} + L\,\omega\right) + \left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)L\,\omega\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - L\,\omega\right)\right)\right)$$

Out[851]= $$\frac{L\,R\,\omega\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - L\,\omega\right) - R\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)\left(-\frac{1}{\text{Co}\,\omega} + L\,\omega\right) + i\left(L\,\omega\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - L\,\omega\right) + R^2\left(-\frac{1}{\text{Co}\,\omega} + L\,\omega\right)\right)}{R^2 + \left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)^2}$$

Troviamo la parte immaginaria del numeratore di Ztot:

In[852]:= $$\text{ImZtot}[\omega\_] = \left(L\,\omega\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - L\,\omega\right) + R^2\left(-\frac{1}{\text{Co}\,\omega} + L\,\omega\right)\right)$$

Out[852]= $$L\,\omega\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - 2\,L\,\omega\right)\left(\frac{1}{\text{Co}\,\omega} - L\,\omega\right) + R^2\left(-\frac{1}{\text{Co}\,\omega} + L\,\omega\right)$$

Poniamo Im(Ztot) = 0 per trovare le pulsazioni di risonanza del circuito:

In[853]:= `Solve[ImZtot[ω] == 0, ω]`

Out[853]= $$\left\{\left\{\omega \to -\frac{1}{\sqrt{\text{Co}}\,\sqrt{L}}\right\}, \left\{\omega \to \frac{1}{\sqrt{\text{Co}}\,\sqrt{L}}\right\}, \left\{\omega \to -\frac{\sqrt{L - \text{Co}\,R^2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\text{Co}}\,L}\right\}, \left\{\omega \to \frac{\sqrt{L - \text{Co}\,R^2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\text{Co}}\,L}\right\}\right\}$$

In[854]:= $$\omega\text{Ris1} := \frac{\sqrt{L - \text{Co}\,R^2}}{\sqrt{2\,\text{Co}}\,L}$$

In[855]:= $$\omega\text{Ris2} := \frac{1}{\sqrt{\text{Co}\,L}}$$

Con i dati del problema:

In[856]:= $L := 10^{-3}$

In[857]:= $\text{Co} := 5\;10^{-9}$

In[858]:= $R := 1000$

In[859]:= `N[ωRis1]`

Out[859]= `0. + 632456. i`

Infatti risulta:

In[860]:= $L - \text{Co}\,R^2$

Out[860]= $-\frac{1}{250}$

Quindi la prima risonanza **non esiste** perchè è L-CoR^2< 0

In[861]:= `N[ωRis2]`

Out[861]= `447214.`

- **Es. 4** Una linea di trasmissione ha impedenza caratteristica **Ro = 75 Ohm**. La linea è chiusa su un carico **R**. Inviando nella linea un segnale di ampiezza **A**, il segnale viene riflesso con ampiezza **A/3**. Calcolare il valore di **R.**

Soluzione:

Il coefficiente di riflessione della linea è dato da:

$\rho = \frac{R-\text{Ro}}{R+\text{Ro}}$

per cui, se vale ρ = 1/3, deve essere:

$\frac{1}{3}=\frac{R-\text{Ro}}{R+\text{Ro}}$ => $\frac{1}{3}$(R+Ro) = R-Ro => ($\frac{1}{3}$+1)Ro = R (1-$\frac{1}{3}$) => $\frac{4}{3}$Ro = $\frac{2}{3}$R => 2 Ro = R = 150 Ohm