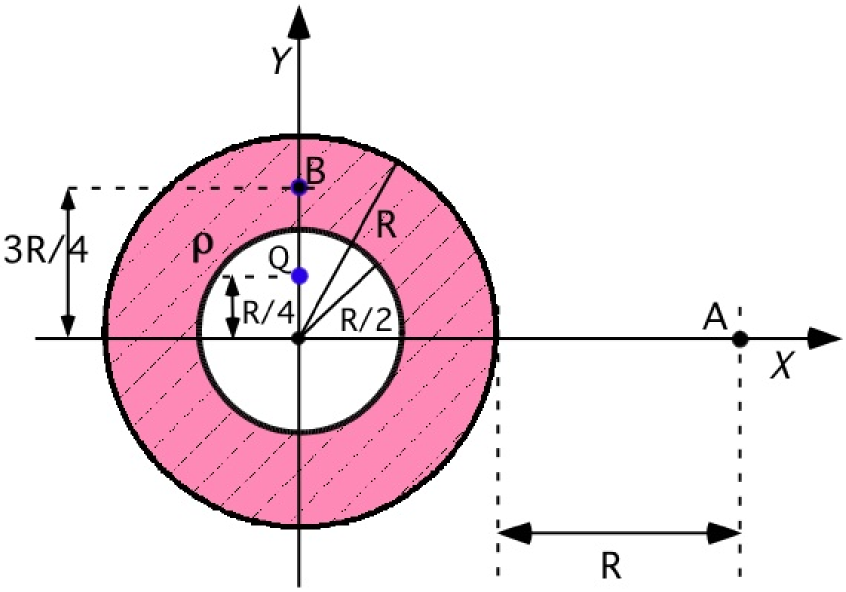
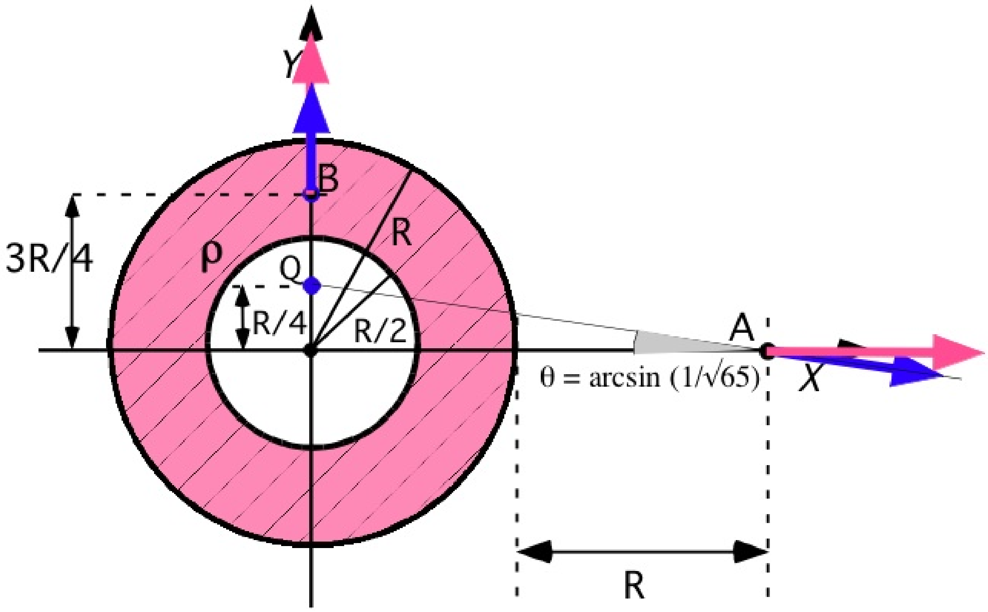
Soluzioni della prova di esonero di Fisica II N.O. per INFORMATICA, 29 / 04 / 2008

Es. 1 In una sfera isolante di raggio **R**, carica con densità di carica per unità di volume ρ, è un foro sferico, di raggio **R/2**, concentrico con la sfera. Una carica Q all'interno del guscio sferico nella posizione indicata in figura. Calcolare il campo elettrico **E** nelle posizioni A e B indicate in figura.

Dati: ρ = **10^{-4} C/m3, R = 1 m, Q = 10^{-4} C**



- **Soluzione:**
  nella figura sono indicati i vettori prodotti dal guscio sferico di raggio R e dalla carica Q, nei punti A e B:




```
<< PhysicalConstants`
```

Dati:

$R := 1\,\text{Meter}$

$\rho := 10^{-4}\,\text{Coulomb} / \text{Meter}^3$

$Q := 10^{-4}\,\text{Coulomb}$

Calcolo del campo E in B:

Per **r** ≥ **R/2**, il modulo del campo elettrico è dato dal teorema di Gauss applicato ad una superficie sferica di raggio **r**, concentrica con il guscio sferico:

$\Phi(E(r)) = 4\pi r^2 E(r) = Q(r)/\epsilon_0$

La carica Q(r) è quella del guscio sferico compresa tra R/2 ed r:

$Q(r) = \rho\,\frac{4}{3}\,\pi\left(r^3 - \frac{R^3}{8}\right)$

per cui:

$$Es[r\_] = \frac{\rho}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{4}{3}\,\pi\left(r^3 - \frac{R^3}{8}\right)$$

$$\frac{3.7647\times 10^6\,\text{Coulomb}\left(-\frac{\text{Meter}^3}{8} + r^3\right)\text{Volt}}{\text{Ampere Meter}^2\,r^2\,\text{Second}}$$

Il modulo di E(r) per $r=\frac{3}{4}R$ è:

$$Es\left[\frac{3}{4}\,R\right]$$

$$\frac{1.98692\times 10^6\,\text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere Meter Second}}$$

Il campo Es è diretto radialmente verso l'esterno, come indicato in figura.

Il campo in **B** della carica **Q** a **y = R/4** ha la stessa direzione e verso di **Es**:

$$Eq[r\_] = \frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{898\,755.\,\text{Coulomb Meter Volt}}{\text{Ampere}\,r^2\,\text{Second}}$$

La distanza della carica Q (y=R/4) dal punto B (y=(3/4)R) è: r = R/2

$$Eq[R/2]$$

$$\frac{3.59502\times 10^6\,\text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere Meter Second}}$$

Dato che Es e Eq hanno la stessa direzione e sono concordi, EtotB è dato da:

$$EtotB = Es\left[\frac{3}{4}\,R\right] + Eq[R/2]$$

$$\frac{5.58194\times 10^6\,\text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere Meter Second}}$$

Calcolo del campo E in A:

La carica totale del guscio sferico di raggio interno R/2 e raggio esterno R è data dal prodotto tra il volume del guscio e la densità di carica:

$$\mathbf{QsTot} := \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{8}\right)\rho$$

Il campo EsA generato dal guscio sferico in A ad x = 2R è:

$$\mathbf{QspTot} := -\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3\rho$$

$$\mathbf{EsA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{QsTot}}{(2R)^2} \;//\; N$$

$$\frac{823\,527.\ \text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere Meter Second}}$$

Il campo EqA generato dalla carica Q in x = 0, y = $\frac{3}{4}$R, nel punto A è:

$$\mathbf{EqA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(\frac{R}{4}\right)^2 + (2R)^2} \;//\; N$$

$$\frac{221\,232.\ \text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere Meter Second}}$$

dove dA = $\sqrt{\left(\frac{R}{4}\right)^2 + (2R)^2}$ è la distanza della carica Q dal punto A

L'angolo che il vettore EqA forma con l'asse delle x e con EsA e' dato da:

$$\theta = \mathbf{ArcSin}\left[\frac{R}{4} \Big/ \sqrt{\frac{R^2}{16} + 4R^2}\,\right]$$

$$\text{ArcSin}\left[\frac{\text{Meter}}{\sqrt{65}\,\sqrt{\text{Meter}^2}}\right]$$

Le componenti EqAx e EqAy sono date da:

$$\mathbf{EqAy} = -\mathbf{EqA}\,\mathbf{Sin}[\theta]$$

$$-\frac{27\,440.5\ \text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere}\sqrt{\text{Meter}^2}\ \text{Second}}$$

$$\mathbf{EqAx} = \mathbf{EqA}\,\mathbf{Cos}[\theta]$$

$$\frac{219\,524.\ \text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere Meter Second}}$$

Infine, tenendo conto che EsA è diretto lungo l'asse x, possiamo scrivere EtotA:

$$\mathbf{EtotAx} = \mathbf{EqAx} + \mathbf{EsA}$$

$$\frac{1.04305\times 10^{6}\ \text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere Meter Second}}$$

```
EtotAy = EqAy
```

$$-\frac{27\,440.5\ \text{Coulomb Volt}}{\text{Ampere}\sqrt{\text{Meter}^2}\ \text{Second}}$$

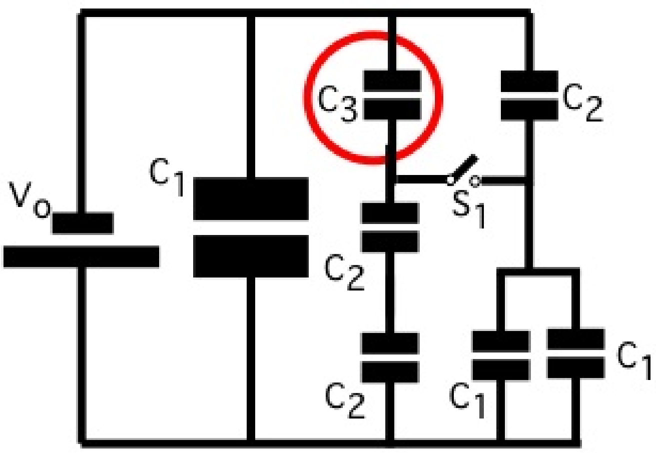
```
EtotA = √(EtotAx² + EtotAy²)
```

$$1.04341\times10^{6}\sqrt{\frac{\text{Coulomb}^2\ \text{Volt}^2}{\text{Ampere}^2\ \text{Meter}^2\ \text{Second}^2}}$$

Notare che le unità fisiche di Etot date da *Mathematica* corrispondono correttamente a V/m. Infatti è: [Ampere]=[Coulomb/-Second].

Es. 2 Si consideri il circuito in figura. Calcolare la differenza di potenziale ai capi della capacità indicata, con l' interruttore S1 chiuso o aperto

Dati: Vo = 10 V, C1 = 10^{-9} F, C2 = 3 10^{-9} F, C3 = 2 10^{-9} F



- ## Soluzione:

Dati:

```
Vo := 10 Volt
C1 := 10^-9 Farad
C2 := 3 10^-9 Farad
C3 := 2 10^-9 Farad
```

- ### S1 Aperto

```
C1eq := 2 C1 // N
```

$$\text{CeqB} := \frac{\text{C2} + \text{C1eq}}{\text{C2 C1eq}}$$

$$\text{CeqA} := \frac{\text{C2}^2\ \text{C3}}{2\ \text{C2 C3} + \text{C2}^2}$$

$$\text{QeqA} = \text{Vo}\ \frac{\text{C2}^2\ \text{C3}}{2\ \text{C2 C3} + \text{C2}^2}\ //\ \text{N}$$

8.57143×10^{-9} Farad Volt

$$V3 = \frac{QeqA}{C3} \; // \; N$$

4.28571 Volt

CTotAperto = C1 + CeqA + CeqB // N

$$\frac{8.33333 \times 10^{8}}{\text{Farad}} + 1.85714 \times 10^{-9}\ \text{Farad}$$

QeqCTotAperto = CTotAperto Vo // N

$$10. \left(\frac{8.33333 \times 10^{8}}{\text{Farad}} + 1.85714 \times 10^{-9}\ \text{Farad} \right) \text{Volt}$$

- **S1 Chiuso**

$$CeqAc = 2\, C1 + \frac{C2}{2} \; // \; N$$

3.5×10^{-9} Farad

CeqBc = C3 + C2 // N

$5. \times 10^{-9}$ Farad

$$CeqCc = \frac{CeqBc\ CeqAc}{CeqAc + CeqBc} \; // \; N$$

2.05882×10^{-9} Farad

QeqCc = Vo CeqCc // N

2.05882×10^{-8} Farad Volt

$$V3chiuso = \frac{QeqCc}{CeqBc} \; // \; N$$

4.11765 Volt

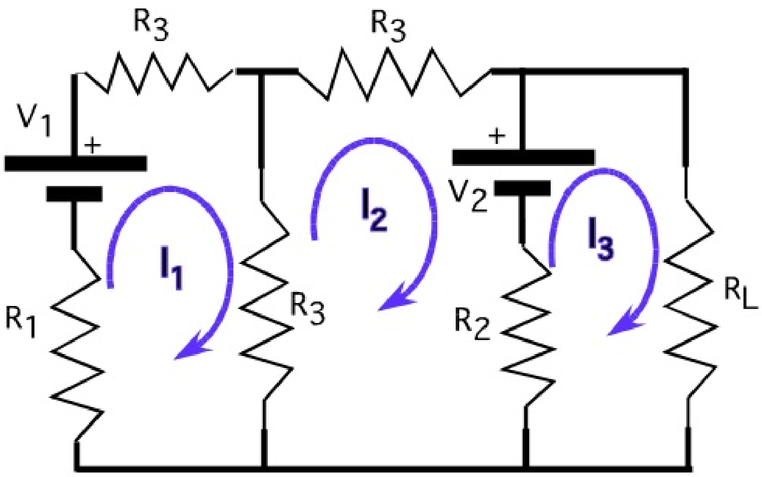
CTotChiuso = C1 + CeqCc // N

3.05882×10^{-9} Farad

QeqChiuso = Vo CTotChiuso

3.05882×10^{-8} Farad Volt

- **Es. 3** Si consideri il circuito in figura: calcolare la corrente che scorre in $\mathbf{R_L}$
  Dati: V_1 = 10 V, V_2 = 20 V, R_1 = 1 Ohm, R_2 = 5 Ohm, R_L = 8 Ohm




```
V1 := 10 Volt

V2 := 20 Volt

R1 := 1 Ohm

R2 := 2 Ohm

R3 := 5 Ohm

RL := 8 Ohm
```

Si risolve il circuito mediante i principi di Kirchoff, scegliendo come maglie e correnti quelle indicate in figura.
Le equazioni delle tre maglie sono:

V1 = (R1+R3) I1 + R3 (I1 - I2)
-V2 = R3 I2 + R3 (I2 - I1) + R2 (I2 - I3)
V2 = R2 (I3 - I2) + RL I3

V1 = (R1+2R3)I1 + -R3 I2
-V2 = -R3 I1 + (2R3+R2) I2 + -R2 I3
V2 = -R2 I2 + (R2+RL)I3

```
mKc := {{R1 + 2 R3, -R3, 0}, {-R3, 2 R3 + R2, -R2}, {0, -R2, R2 + RL}}

a1 := -V1

a2 := V2

a3 := -V2

mKc {I1, I2, I3} == {a1, a2, a3}

{{11 I1 Ohm, -5 I1 Ohm, 0}, {-5 I2 Ohm, 12 I2 Ohm, -2 I2 Ohm},
  {0, 3.50877 Ampere Ohm, -17.5439 Ampere Ohm}} == {-10 Volt, 20 Volt, -20 Volt}

LinearSolve[mKc, {a1, a2, a3}] // N
```

$$\left\{-\frac{0.350877\,\text{Volt}}{\text{Ohm}}, \frac{1.22807\,\text{Volt}}{\text{Ohm}}, -\frac{1.75439\,\text{Volt}}{\text{Ohm}}\right\}$$

```
I3 := -1.7543859649122806 Ampere
```

```
VL = RL * I3 // N
```

```
-14.0351 Ampere Ohm
```